CORSO
DI
GEOMETRIA
ELEMENTARE, E SUBLIME

AD USO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE DEL REGNO,
E DELLA REALE ACCADEMIA DI MARINA.

DIVISO IN QUATTRO VOLUMI.

VOLUME II.

Che contiene l' XI°., e 'l XII°. Libro degli Elementi di EUCLIDE; il I°. Libro di ARCHIMEDE sulla Sfera, e sul Cilindro; un Breve Trattato della Misura del Cerchio; e le Note critiche e geometriche per l' esposto in questo Volume, e nel precedente.

I LIBRI
UNDECIMO, E DUODECIMO
DEGLI ELEMENTI
DI
EUCLIDE

EMENDATI IN QUE' LUOGHI, IN CUI UNA VOLTA FURONO VIZIATI DA TEONE, O DA ALTRI; E NE' QUALI SONO RESTITUITE ALCUNE DEFINIZIONI, E DIMOSTRAZIONI DELLO STESSO EUCLIDE.

DA V. FLAUTI.

Professore di Analisi Sublime nella Regia Università degli Studj di Napoli, Bibliotecario della Società Reale Borbonica, Socio e Segretario per le Matematiche della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell' Istituto d' Incoraggiamento, Membro Onorario della Società Reale di Copenaghen, e di altre Accademie, ec.

SETTIMA EDIZIONE.

Optime illi mihi de Geometria meriti esse videntur, qui in antiquis auctoribus emendandis, illustrandisque operam posuerunt.
TOR. Praef. in ARCH.

NAPOLI

Dalla Stamperia della Reale Accademia di Marina.

1820.

L' UNDECIMO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE.

(DELLA GEOMETRIA IL SETTIMO)

DEFINIZIONI

1. Il *solido* è ciò, che ha lunghezza, larghezza, e profondità.

II. Il termine del solido è la superficie.

III. La linea retta è *perpendicolare al piano*, quando fa angoli retti con tutte le linee rette, che sono nel piano sottoposto, e la toccano.

IV. Il piano è *perpendicolare al piano*, quando le linee rette, che si tirano in uno di essi perpendicolari alla comune sezione loro, sono anche perpendicolari all' altro piano.

V. L' *inclinazione della linea retta al piano* è l' angolo acuto da essa linea retta contenuto, e da un' altra tirata dal punto ove quella linea retta incontra il piano, al punto in cui questo è incontrato dalla perpendicolare tirata ad esso da un altro punto preso in quella retta medesima in sublime.

VI. L' *inclinazione del piano ad un altro piano* è quell' angolo acuto, ch' è compreso da due perpendicolari alla comune sezione de' piani, le quali si tirano da uno

stesso punto di essa, una nell' un piano, e l'altra nell' altro.

VII. Il piano è detto *inclinarsi similmente* al piano, che un altro ad un altro, quando sono uguali gli angoli delle inclinazioni.

VIII. *Piani paralleli* sono quelli, che tra loro non convengono, comunque si prolunghino indefinitamente.

V. N. IX. L' *angolo solido* è quell' inclinazione, che si costituisce ad un punto sublime da più linee rette, che da questo si tirano a' vertici degli angoli di un rettilineo sottoposto.

V. N. X. *Figure solide simili* sono quelle, che hanno i loro angoli solidi uguali, l' un l'altro, e proporzionali i lati omologhi (*) intorno agli angoli uguali.

V. N. XI. » Una tal dimostrazione, ch'è la X nel Testo Greco, si è tralasciata per le ragioni addotte nelle Note.

XII. La *piramide* è una figura solida compresa da piani, la quale da un piano si costituisce ad un punto sublime, nel quale tutti gli altri piani che la terminano si riuniscono.

XIII. Il *prisma* è una figura solida compresa da piani, de' quali due, che sono opposti e paralleli, sono rettilinei uguali, simili e similmente posti, ed i rimanenti sono parallelogrammi.

XIV. La *sfera* è la figura solida descritta da un semicerchio, il qual si rivolga intorno al suo diametro fisso, finchè ritorni al luogo dal quale cominciò a muoversi.

XV. L' *asse* della sfera è la linea retta, che sta ferma, intorno alla quale il mezzo cerchio si gira.

XVI. Il *centro* della sfera è il medesimo che del mezzo cerchio.

XVII. Il *diametro* della sfera è ogni linea retta, che

(*) Cioè que' lati che restano distesi l' uno sull' altro, allorchè le due figure solide si adattino in modo, che abbiano un angolo solido di comune.

passa per lo centro, e dall' una e l' altra parte è terminata dalla superficie sferica.

XVIII. Il *cono* è la figura solida descritta da un triangolo rettangolo, il qual si rivolga intorno ad un lato immobile, di quelli che sono intorno all' angolo retto, finchè ritorni nel luogo medesimo dal quale cominciò a muoversi. E se il lato che sta fermo sia uguale all' altro lato che si gira intorno all' angolo retto, il cono si chiamerà *rettangolo*; ma se è minore, si dirà *ottusangolo*; e se maggiore, *acutangolo*. V. N.

XIX. L' *asse* del cono è il lato immobile intorno al quale si rivolge il triangolo.

XX. La *base* del cono è poi il cerchio, che si descrive dall' altro lato, che si gira.

XXI. Il *cilindro* è la figura solida descritta da un parallelogrammo rettangolo, il qual si rivolga intorno ad un lato immobile, finchè ritorni dove aveva cominciato a muoversi. V. N.

XXII. L' *asse* del cilindro è il lato immobile intorno al quale si gira il parallelogrammo.

XXIII. E si chiama *base* del cilindro ciascuno de' due cerchi descritti da que' lati opposti del parallelogrammo che sono ad angolo con l' asse.

XXIV. Coni *simili*, e cilindri *simili* sono quelli, de' quali gli assi sono proporzionali a' diametri delle basi.

XXV. Il *cubo* è la figura solida contenuta da sei quadrati uguali.

XXVI. Il *tetraedro* è la figura solida compresa da quattro triangoli equilateri uguali.

XXVII. L' *ottaedro* è la figura solida contenuta da otto triangoli equilateri uguali.

XXVIII. Il *dodecaedro* è la figura solida contenuta da dodici pentagoni uguali, equilateri, ed equiangoli.

XXIX. L' *isocaedro* è la figura solida compresa da venti triangoli equilateri uguali.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Di una linea retta non può esserne una qualche sua parte in un piano, ed un' altra in sublime.

fig. 1. Se ciò può succedere, della linea retta ABC ne stia la sua parte qualunque AB nel piano LM, e l'altra BC in sublime; sarà certamente una linea retta continuata nel piano LM per diritto alla AB; e sia la BD. Or se il piano LM si concepisca rivolgersi intorno alla AD, dovrà esso passare pel punto C; ed allora trovandosi in tal piano i punti B, C, dovrà anche trovasi in esso la linea retta BC. Che perciò le due linee rette ABC, ABD avrebbero di comune il segmento AB; la qual cosa non può succedere*.

* c.14.I.

Quindi di una linea retta non può esserne, ec. C.B.D.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

V. N. *Tre punti, che non istiano per diritto, sono in un medesimo piano. E due linee rette che s' intersegano consistono anche in un piano.*

fig. 2. Sieno i tre punti E, C, B, i quali non istiano per diritto: dico ch' essi siano in un medesimo piano.

Si uniscano due di essi E, B per la EB, e s'intenda per questa passare un piano, il quale si concepisca rivolgersi intorno alla EB; dovrà un tal piano necessariamente passare per lo punto C; e perciò i tre punti E, C, B consistono in un piano. Adunque anche

le linee rette EC, EB che congiungono questi punti consisteranno nel piano stesso. Ma nel piano in cui sono le CE, EB vi stanno anche le ED, AE*: adunque le linee rette CD, AB, che s'intersegano consistono in un piano. * 1. XI.

E perciò tre punti ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se due piani s'intersegano, la loro comune sezione è una linea retta. V. N.

S'interseghino i due piani AK, LM: dico che la loro comune sezione sia una linea retta. *fig.* 3.

Imperocchè presi i punti B, D in questa comune sezione, è chiaro, che se congiungasi la linea retta BD, questa unendo due punti, che esistono in ciascuno di essi piani, debba cadere nel tempo stesso sì nell'uno, che nell'altro: che perciò debba essere la loro comune sezione.

Laonde la comune sezione ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una linea retta è perpendicolare a due linee rette che s'intersegano, nel punto della loro intersezione; sarà anche perpendicolare al piano che passa per esse. *fig.* 4.

Sieno AB, DC due linee rette, che s'intersegano in E, e la FE sia perpendicolare ad esse in questo punto E: dico che una tal linea retta FE debba esse-

re anche perpendicolare al piano LM, che passa per le AB, CD.

Prendansi le linee rette EA, EC, EB, ED uguali tra loro; e per E si tiri comunque la linea retta GEH, e giungansi le DA, BC: poi da qualsivoglia punto F nella EF si tirino le FA, FG, FD, FB, FH, FC.

E poichè le due linee rette AE, ED sono uguali alle due altre CE, EB, e contengono angoli uguali, sarà anche la base AD uguale alla base BC*, e l'angolo DAE uguale all'angolo EBC. Ma è pure l'angolo AEG uguale all'angolo BEH; adunque i due triangoli AEG, BEH avendo due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed uguali i lati AE, EB, che sono adjacenti agli angoli uguali; avranno i rimanenti lati uguali a' rimanenti lati*: per lo che sarà GE uguale ad EH, ed AG a BH. Or essendo la AE uguale alla EB, e la FE comune e perpendicolare ad esse; sarà la base FA uguale alla base FB*: e per la stessa ragione sarà la FD uguale alla FC. Inoltre perchè la FD è uguale alla FC, e la AF alla FB, saranno le due FA, FD uguali alle due FB, FC, l'una all'altra; e si è dimostrata la base AD uguale alla base BC; adunque l'angolo FAD è uguale all'angolo FBC. Quindi i due triangoli FAG, FBH avendo i lati FA, AG uguali a' lati FB, BH, l'uno all'altro, e l'angolo FAG uguale all'angolo FBH, come si è dimostrato, avranno la base FG uguale alla base FH. E perchè si è dimostrata la GE uguale alla EH, e la EF comune, saranno le due GE, EF uguali alle due due HE, EF, e la base FG è uguale alla base FH; adunque l'angolo FEG sarà uguale all'angolo FEH; e però amendue gli angoli GEF, HEF sono retti: laonde la FE sarà perpendicolare alla GEH. Similmente si dimostra, che la FE è perpendicolare ad ogni altra linea retta tirata per E nel sottoposto piano: e la linea retta è per-

* 4. I.

* 26. I.

* 4. I.

pendicolare al piano quando fa angoli retti colle linee rette che la toccano e sono in quel medesimo piano* ; onde la FE è perpendicolare al piano nel quale giacciono le AB, DC. C. B. D. *d.3.XI.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una linea retta è perpendicolare a tre linee rette che si toccano fra loro, nel comune segamento, le dette tre linee consisteranno in un medesimo pinao.

La linea retta AB sia perpendicolare a tre altre linee rette BC, BD, BE, nel punto B ov' esse si toccano: dico le BC, BD, BE consistere in un piano. *fig.* 5.

Poichè se può succedere, una di queste BC non consista con le altre due in un piano; ma il piano ABF, che passa per essa, e per la BA interseghi il piano LM, in cui giacciono le altre due BD, BE; lo dovrà intersegare in una linea retta*, che sia la BF. E poichè la AB è perpendicolare all' una, e l' altra BD, BE, sarà anche perpendicolare al piano LM che passa per esse*, e quindi alla BF, che giace in questo piano*. Dunque è retto l' angolo ABF: ma si è supposto esser anche retto l' angolo ABC; quindi l' angolo ABF è uguale all' angolo ABC, e sono nel medesimo piano, la qual cosa è impossibile. E perciò le tre linee rette BC, BD, BE dovranno consistere in un piano. * 3. XI. * 4. XI. *d.3.XI.

Laonde se una linea retta ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due linee rette sieno perpendicolari ad un medesimo piano, saranno parallele tra loro.

fig. 6. Sieno AB, CD due linee rette perpendicolari al medesimo piano LM: dico ch'esse sieno tra loro parallele.

Imperocchè incontrino il piano LM ne' punti B, D, che si uniscano con la BD, alla quale si tiri dal punto D, e nel piano LM, la perpendicolare DE; e poste uguali le BA, DE, giungansi le BE, AD, AE.

E poichè la AB è perpendicolare al sottoposto piano, farà gli angoli retti con tutte le linee rette che
d.3.XI. la toccano e sono in tal piano; ma l'una e l'altra BD, BE tocca la AB, essendo nel piano sottoposto; adunque amendue gli angoli ABD, ABE sono retti; per la medesima ragione ancora sono retti amendue gli angoli CDB, CDE. E perchè la AB è uguale alla DE, e la BD è comune, saranno le due AB, BD uguali alle due ED, DB, e contengono angoli retti; adunque la base AE è uguale alla base BE. E perchè la AB è uguale alla DE, e la AD alla BE, le due AB, BE sono uguali alle due ED, DA, e la base di esse AE è comune; l'angolo dunque ABE è uguale all'angolo EDA: ma ABE è retto, adunque è retto EDA; e però la ED è perpendicolare alla DA: ma è eziandio perpendicolare all'una, e l'altra di esse BD, DC; onde la ED è perpendicolare alle tre linee rette DB, DA, DC, nel contatto, e per tal ragione queste tre
* 5. XI. linee rette DB, DA, DC consisteranno in un piano*: ma nel piano delle BD, DA è pure la BA; poichè
* 2. XI. esistendo i tre punti B, D, A in un piano*, le tre li-

nee rette BD, DA, che gli congiungono debbono trovarsi nel piano stesso che passa per quelli. Adunque nelle linee rette BA, DC esistenti in un piano stesso, cadendovi la BD, e formando gli angoli interiori ABD, BDC retti, esse BA, DC saranno parallele*. * 28. I.

E perciò se due linee rette, ec. C. B. D.

N. B. » La Prop. VII. si è tralasciata (*Veggasi la Nota ad essa*).

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se due linee rette sieno parallele, e l' una di loro sia perpendicolare ad un piano, anche l' altra sarà perpendicolare al medesimo piano.

Le due linee rette AB, CD sieno parallele, ed AB sia perpendicolare al sottoposto piano LM: dico anche CD esser perpendicolare allo stesso piano. *fig.* 6.

Si uniscano i punti B, D, ove le AB, CD incontrano il piano LM, una tal congiungente BD cadrà nel piano delle parallele AB, CD; e perciò saranno le AB, CD, BD in uno stesso piano: indi dal punto D si tiri nel piano LM la DE perpendicolare alla DB, si ponga la DE uguale alla AB, e si uniscano le BE, AE, AD. E poichè la AB è perpendicolare al piano LM, dovrà esser perpendicolare sì alla BD, che alla BE, che sono in questo piano, e la toccano in B*: perciò ciascuno degli angoli ABD, ABE è retto. Or essendo AB uguale a DE, e BD comune, saranno le due AB, BD uguali alle due ED, DB, l' una all' altra: ma è anche l' angolo ABD uguale all' angolo EDB, perchè ciascuno di essi è retto; quindi la base AD è ugua- * *d*.3.XI.

le alla base BE. Similmente essendo la AB uguale alla DE, e la BE alla AD, saranno le due AB, BE uguali alle due ED, DA: è poi la base AE comune; adunque sarà l' angolo ABE uguale all' altro EDA: ed è retto ABE; adunque anche EDA sarà retto; e la ED è perpendicolare alla DA. Ma la ED è anche perpendicolare alla DB; dovrà perciò la ED esser perpendicolare al piano

* 4. XI. che passa per le BD, DA*, e quindi a tutte le linee rette che essendo nel medesimo piano la toccano: ma la DC si trova in questo piano, mentre tutte tre le BD, DA, DC sono nel piano nel quale esistono le parallele AB, CD; onde la ED è perpendicolare alla DC, e l' angolo CDE è retto. Ma è anche retto l' altro CDB: adunque la CD essendo perpendicolare alle due linee rette DB, DE nel punto D ove s' intersegano, sarà anche perpendicolare al piano LM che

* 4. XI. passa per esse*.

E perciò se una linea retta ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Le linee rette parallele ad una medesima linea retta, che non sono nello stesso piano con questa, sono altresì parallele tra loro.

fig. 7. Sia ciascuna delle linee rette AB, CD parallela ad EF, e non stieno esse tre linee rette nel piano stesso: dico che AB sia parallela a CD.

Imperocchè si prenda nella EF un qualsivoglia punto G, dal quale si tirino alla EF le due perpendicolari GH, GK, la prima nel piano delle parallele EF, AB, l' altra in quello delle parallele EF, CD. E poichè la EF è perpendicolare alle due GH, GK, sa-

rà anche perpendicolare al piano in cui queste consistono*: e la FE è parallela alla AB; adunque anche la AB è perpendicolare al piano che passa per HGK*: e per la medesima ragione la CD è perpendicolare al piano stesso; onde ambedue le AB, CD saranno perpendicolari al piano che passa per HGK. Ma se due linee rette sono perpendicolari ad un medesimo piano sono parallele fra loro; adunque la AB sarà parallela alla CD. C. B. D.

* 4. XI.
* 8. XI.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Se due linee rette che si toccano sono parallele a due altre linee che si toccano, ma non nel medesimo piano, conterranno angoli uguali.

Sieno due linee rette che si toccano AB, AC parele a due altre, che pur si toccano DE, DF, ma non nel medesimo piano: dico che l'angolo BAC sia uguale all'altro EDF.

fig. 8.

Piglinsi le BA, AC, ED, DF fra loro uguali, e si uniscano le AD, BE, CF, BC, EF. E poichè la BA è uguale e parallela alla DE, sarà anche la AD uguale e parallela alla BE. Per la stessa ragione la CF è uguale e parallela alla AD: quindi amendue le BE, CF sono uguali e parallele alla AD; e quelle che sono parallele ad una medesima linea retta, e non sono nel medesimo piano con essa, sono fra loro parallele*; onde la EB è parallela alla CF; e gli è pure uguale; quindi anche uguali, e parallele saranno le BC, EF, che congiungono gli estremi corrispondenti di quelle. Perciò i due triangoli BAC, EDF avendo i lati AB, AC uguali a' lati ED, DF, l'uno all'altro, e la base BC uguale alla base EF; sarà l'angolo BAC uguale all' angolo EDF*.

* 9. XI.
* 8. I.

Adunque se due linee rette ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Da un punto dato in sublime tirare la perpendicolare al piano sottoposto.

fig. 9. Sia dato il punto A in sublime, e sia dato il sottoposto piano LM; fa d' uopo tirare dal punto A la perpendicolare al sottoposto piano LM.

Si tiri nel sottoposto piano LM una linea retta BC in qualunque modo, alla quale si tiri dal dato punto
* 12. I. A la perpendicolare AD*; se questa sarà anche perpendicolare al sottoposto piano LM, si sarà fatto ciò, che si proponeva; ma se no, dal punto D si tiri alla
* 11. I. BC, nel piano LM, la perpendicolare BF*, ed a questa si tiri dal punto A la perpendicolare AF; sarà tal linea retta la perpendicolare al piano LM.

* 31. I. Per F si tiri la FE parallela alla BC*. E perchè la BC è perpendicolare ad amendue le DA, DF, sarà ancor la BC perpendicolare al piano che passa per le FD, DA; ed è la FE parallela ad essa; e se sono due linee rette parallele, l' una delle quali sia perpendicolare a qualche piano, l' altra sarà ancora al medesimo piano perpendicolare; onde ancor la FE è perpendicolare al piano che passa per le FD, DA, e però è perpendicolare a tutte le linee rette, che essendo nel medesimo
* d. 3. XI. piano la toccano*. Ma AF la tocca ed è nel medesimo piano, che passa per le FD, DA; adunque la FE è perpendicolare alla FA, o sia la FA alla FE: ed è la FA perpendicolare alla DF; che perciò la AF è ad amendue le FE, FD perpendicolare. Or se una linea retta è perpendicolare a due linee rette che si segano fra loro, nella comune sezione, sarà ancor perpendi-

colare al piano che passa per le dette linee* ; onde la FA è perpendicolare al piano che passa per le FD, FE. Ma il piano per le FD, FE è il piano sottoposto ; adunque la AF è perpendicolare al sottoposto piano. * 4. XI.

Quindi da un punto dato in sublime si è tirata la perpendicolare ad un sottoposto piano C. B. F.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Costituire una linea retta perpendicolare ad un piano da un punto dato in esso.

Sia A il punto dato nel piano LM, fa d' uopo da questo punto A costituire una linea retta perpendicolare al piano LM. *fig.* 10.

Intendasi un altro punto sublime B, dal quale si tiri al piano sottoposto LM la perpendicolare BC*, e ad essa si tiri per A la parallela AD*. E perchè sono parallele le due linee rette AD, CB, ed una di esse BC è perpendicolare al sottoposto piano, ancor la rimanente AD sarà a tal piano perpendicolare*. * 11. XI. * 31. I. * 8. XI.

E perciò si è costituita una linea retta perpendicolare ad un piano da un punto dato in esso. C. B. F.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

In uno stesso punto non si costituiranno ad un piano, dalla medesima parte, due perpendicolari.

S' egli è possibile dal punto A ch' è in un piano LM costituiscansi due linee rette AB, AC perpendicolari *fig.* 11.

ad esso, dalla medesima parte. Si tiri per esse un piano, la cui comune sezione col piano LM sia la linea retta DE*. Adunque le due linee rette AB, AC sono in un piano; e perchè una di esse AC è perpendicolare al sottoposto piano, sarà anche perpendicolare a tutte le linee rette, che essendo nel medesimo piano la toccano*; ma DAE la tocca, ed è nel sottoposto piano, onde l'angolo CAE è retto: per la medesima ragione è retto l'angolo BAE. Adunque l'angolo CAE è uguale all' altro BAE; e sono in un piano; che non è possibile.

* 3. XI.
* d. 3. XI.

Laonde in uno stesso punto non si costituiranno ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Que' piani a' quali è perpendicolare una stessa linea retta, sono paralleli.

fig. 12. Sia la linea retta AB perpendicolare sì al piano EF, che all' altro CD: dico che questi piani siano paralleli.

Se non è così, prolungati converranno: si prolunghino e convengano nella linea retta HG*, e preso in questa qualsivoglia punto K, giungansi le AK, BK. Perchè dunque la AB è perpendicolare al piano CD, sarà perpendicolare alla BK, essendo la linea retta BK nel piano CD prolungato*, onde l'angolo ABK è retto; e per la medesima ragione è retto l'angolo BAK: perciò due angoli del triangolo ABK sono uguali a due retti; che non è possibile. Laonde i piani CD, EF prolungati non converranno; e però è necessario che sieno paralleli.

* 3. XI.
* 1. XI.
* 17. I.

Adunque que' piani a' quali ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se due linee rette, che si toccano, sieno parallele a due altre linee rette, che ancor esse si toccano, ma non nel medesimo piano; eziandio i piani che passano per le dette linee, saranno paralleli. V. N.

Due linee rette AB, BC, che si toccano, sieno parallele a due altre che ancor si toccano ED, EF, e non nel medesimo piano: dico i piani che passano per le AB, BC ed ED, EF, se si prolunghino, non convenire tra loro. *fig.* 13.

Tirisi dal punto B al piano che passa per le DE, EF la perpendicolare BG, che tocchi il piano nel punto G; e per G tirisi la GH parallela alla ED, e la GK parallela alla EF. E perchè la BG è perpendicolare al piano che passa per le DE, EF, sarà ancora perpendicolare a tutte le linee rette che la toccano, e sono nel medesimo piano*; e la toccano amendue le GH, GK, che sono nel medesimo piano; adunque è retto l'uno e l'altro angolo BGH, BGK. Or essendo la BA parallela alla GH*, gli angoli GBA, BGH sono uguali a due retti*; e BGH è retto; adunque anche GBA sarà retto; onde la GB è perpendicolare alla BA: e per la medesima ragione la GB è perpendicolare alla BC. Essendo dunque la BG perpendicolare alle due linee rette BA, BC, che si segano fra loro, sarà la BG perpendicolare ancora al piano, che passa per le AB, BC. Ma è la BG anche perpendicolare al piano per le DE, EF; adunque la BG è perpendicolare ad amendue i piani che passano per le AB, BC; DE, EF. Ma que' piani a' quali è perpendicola-

* d. 3. XI.
* 9 XI.
* 29. I.

* 14. XI. re una stessa linea retta, sono paralleli*; è dunque il piano per le AB, BC parallelo al piano per le DE, EF.

Laonde se due linee rette, che si toccano, ec. C.B.D.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se due piani paralleli sono segati da qualche piano; le comuni sezioni loro saranno parallele.

fig. 14 Due piani paralleli AB, CD siano segati da qualche piano EFHG: dico che le loro comuni sezioni EF, GH siano parallele.

Imperocchè se le EF, GH non sono parallele, prolungate da una delle due parti converranno. Si prolunghino dalle parti F, H, e convengano in K. E poichè la linea retta GHK è nel piano AB; tutti i punti che si pigliano nella GHK saranno nel medesimo piano; ma il punto K è uno di quelli; adunque un tal punto K è nel piano AB: e per la stessa ragione il punto K dovrà anche trovarsi nel piano CD. Laonde i piani AB, CD, se si prolunghino, converranno. Ma non possono convenire, poichè paralleli. Dunque nè tampoco potranno incontrarsi le linee rette EF, GH dalle parti F, H. Così pure si dimostra, che non possono incontrarsi dalle altre parti E, G: perciò le due linee rette EF, GH, ch'esistono nello stesso piano EFHG, e che non possono incontrarsi nè dall'una nè dall'altra parte, se si prolunghino, saranno parallele.

Adunque se due piani paralleli ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se due linee rette sieno segate da piani paralleli, saranno da questi proporzionalmente divise.

Due linee rette AB, CD sieno segate da' piani paralleli GH, KL, MN ne' punti B, E, A; D, F, C: dico che come la linea retta AE all' altra EB, così stia la CF alla FD. *fig.* 15.

Imperocchè si uniscano le AC, BD, CB, e questa CB incontri il piano KL nel punto X, dal quale si tirino a' punti E, F le EX, XF.

E poichè i piani paralleli MN, KL sono segati dal piano BAC, le comuni sezioni loro AC, EX saranno parallele*: per la stessa ragione, perchè due piani paralleli GH, KL sono segati dal piano BCD, le comuni sezioni loro BD, FX sono parallele. E perchè ad un lato del triangolo ABC, cioè ad AC si è tirata la parallela EX; dovrà stare BE ad EA, come BX ad XC*. Similmente perchè ad un lato del triangolo BCD, cioè a BD si è tirata la parallela FX, sarà coma la DF alla FC, così la BX ad XC; e si è dimostrata la BX alla XC, come la BE alla EA. Adunque starà la BE alla EA, come la DF alla FC*.

* 16. XI.

* 2. VI.

* 11. V.

Che perciò se due linee rette ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se una linea retta sia perpendicolare a qualche piano, tutti i piani che passano per essa saranno anche perpendicolari a quello stesso piano.

fig. 16. La linea retta AB sia perpendicolare al sottoposto piano LE: dico che tutt'i piani che passano per la AB siano perpendicolari al piano LE.

Imperocchè si faccia passare per la AB il piano CH, e sia CE la comune sezione di questo piano col sottoposto LE*, indi si prenda nella CE un qualunque punto F, dal quale si tiri nel piano CH la FG perpendicolare alla CE. E poichè la BA è perpendicolare al piano LE, sarà perpendicolare a tutte le linee rette che sono nel medesimo piano e la toccano*; e perciò è altresì perpendicolare alla CE; onde l'angolo BAF è retto: ma è anche retto l'altro GFA; quindi la AB è parallela alla FG. Per lo che essendo la AB perpendicolare al sottoposto piano LE, sarà anche la FG perpendicolare ad un tal piano*. Ma un piano è perpendicolare ad un'altro, allorchè ciascuna linea retta, che si tira in uno di essi piani perpendicolare alla di loro comune sezione, è anche perpendicolare all' altro piano*: ed essendosi tirata da F in un piano CH la FG perpendicolare alla comune sezione CE, si è dimostrato che questa è anche perpendicolare al piano EL; adunque il piano CH è perpendicolare al sottoposto piano EL. Similmente si dimostreranno tutti i piani, che passano per la AB essere perpendicolari al detto piano.

Laonde se una linea retta ec. C. B. D.

* 3. XI.

* d. 3. XI.

* 8. XI.

* d. 4. XI.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se due piani che s' intersegano siano perpendicolari a qualche piano; eziandio la loro comune sezione sarà perpendicolare al medesimo piano. V. N.

Sieno AB, CB due piani che s' intersegano, ciascun de' quali è perpendicolare al piano AC, e sia BD la loro comune sezione: dico questa BD essere perpendicolare al sottoposto piano AC. fig. 17.

Poichè se non lo è, non potrà nè pure esser perpendicolare alle linee rette DA, DC, che sono nel piano CA, e la toccano in D*; e perciò si potranno da un tal punto tirare due linee rette, una DE nel piano BA, la quale sia perpendicolare ad AD, e l' altra DF nel piano BC, che sia perpendicolare a DC. E poichè il piano AB è perpendicolare all' altro AC, ed in esso si è condotta la DE perpendicolare alla AD comune sezione di questi piani, sarà la DE perpendicolare al sottoposto piano AC*: e similmente si dimostra, che la DF è perpendicolare allo stesso piano AC. Quindi dal medesimo punto D si sarebbero costituite due linee rette perpendicolari al sottoposto piano AC, dalla medesima parte, il che non può essere*. Laonde non si potrà costituire dal punto D al piano AC altra perpendicolare, oltre la DB, ch' è la comune sezione de' piani AB, BC.

E perciò se due piani ec. C. B. D.

* 4. XI. e d. 4. XI.

* d. 4. XI.

* 13. XI.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

V. N. *Se un angolo solido sia contenuto da tre angoli piani; due di loro, comunque presi, sono maggiori del rimanente.*

fig. 18. L'angolo solido A sia contenuto da' tre angoli piani BAC, CAD, DAB: dico che due di questi angoli, comunque presi, siano maggiori del rimanente.

Imperocchè se i tre angoli BAC, CAD, DAB sono fra loro uguali, è manifesto che due di essi, comunque presi, siano maggiori del rimanente. Ma se non è così, uno di essi BAC sarà non minore di ciascuno de' rimanenti, ma però maggiore di uno di questi, come di DAB; perciò si costituisca alla linea retta AB, al punto A in essa, e nel piano dell' angolo BAC, l' angolo BAE

* 23. I. uguale all' altro BAD*; poi pongasi la AE uguale alla AD, e tirata per E la BEC, che incontri le AB, AC, ne' punti B, C, si uniscano le BD, DC. E poichè la DA è uguale alla AE, e la AB è comune, sono perciò le due DA, AB uguali alle due EA, AB, è pure l' angolo DAB uguale all' angolo EAB; adunque la

* 4. I. base BD è uguale alla base BE*. E perchè le due BD, DC sono maggiori della BC, e DB uguale a BE, dovrà la rimanente DC esser maggiore della rimanente CE. Or poichè la DA è uguale alla AE, la AC è comune, e la base DC è maggiore della base EC; sarà

* 25. I. l' angolo DAC maggiore dell' altro EAC*. Ma per costruzione l' angolo DAB è uguale all' altro BAE; quindi gli angoli DAB, DAC, insieme presi, sono maggiori dell' angolo BAC: è poi l' angolo BAC non minore di ciascuno degli altri DAB, DAC; perciò un di

questi insieme con BAC dovrà esser maggiore del rimanente.

Per la qual cosa se un angolo solido ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Ogni angolo solido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti. V. N.

Sia l'angolo solido A contenuto dagli angoli piani BAC, CAD, DAB: dico che questi siano minori di quattro retti. fig. 19.

Si concepisca un piano incontrare quegli altri piani ne' quali esistono gli angoli piani BAC, CAD, DAB, e siano BC, CD, DB le comuni sezioni di quel piano con questi*. Perchè dunque l'angolo solido in B è contenuto da tre angoli piani ABD, ABC, CBD; dovranno due qualunque di questi ABD, ABC esser maggiori del rimanente CBD*: così anche si dimostra che i due angoli ACD, ACB sono maggiori dell'angolo DCB, e che i due ADB, ADC sono maggiori dell'angolo BDC; adunque i sei angoli ABD, ABC, ACB, ACD, ADC, ADB, insieme presi, sono maggiori de'tre angoli CBD, BCD, CDB del triangolo BDC, cioè di due retti*. Or que' sei angoli insieme co' tre altri che comprendono l'angolo solido in A compongono gli angoli de'tre triangoli BAD, DAC, CAB, e fan perciò sei retti*; e sono que' sei angoli maggiori di due retti, come si è dimostrato: adunque quelli che comprendono l'angolo solido in A dovranno esser minori di quattro retti. Similmente si dimostrerebbe, che siano minori di quattro retti gli angoli piani, che comprendono un angolo solido, se essi siano quattro, o più.

* 3. XI.

* 20. XI.

* 32. I.

* 32. I.

Adunque in generale tutti gli angoli piani ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

V. N. *Se sieno tre angoli piani, due de' quali siano maggiori del terzo, comunque presi, ed essi siano contenute da linee rette uguali; si potrà costituire un triangolo dalle tre congiungenti quelle linee rette uguali.*

Fig. 20. Siano i tre angoli piani ABC, DEF, GHK, due de' quali sono maggiori del rimanente, comunque presi, cioè gli angoli ABC, DEF siano maggiori del rimanente angolo GHK, e gli angoli DEF, GHK maggiori dell' angolo ABC, ed oltre a ciò gli angoli GHK, ABC maggiori dell'angolo DEF; sieno di più uguali le linee rette AB, BC, DE, EF, GH, HK, e si uniscano le AC, DF, GK: dico che si possa costituire un triangolo da tre linee rette uguali ad esse AC, DF, GK; cioè che due di queste siano maggiori della rimanente, comunque si prendano.

Imperocchè se gli angoli ABC, DEF, GHK siano fra loro uguali, saranno anche uguali le AC, DF, GK*, e perciò da linee uguali ad esse si potrà costituire un triangolo; ma se al contrario quegli angoli sieno disuguali, sia l' angolo ABC non minore sì dell' angolo DEF, che di GHK: che perciò la linea retta AC non sarà minore sì di DF, che di GK*; ed è quindi manifesto, ch' essa AC insieme con una delle DF, GK, sia maggiore dell' altra di queste. Dico inoltre che DF, GK siano maggiori della AC. Si costituisca alla linea retta AB, e nel punto B in essa l' angolo ABL uguale all' angolo GHK*, e pongasi la BL uguale alla AB, e quindi alla BC, e

* 4. I.

* 24. I.

* 23. I.

DE, o EF, o HG, o HK: finalmente si congiungano le AL, LC. E poichè le due AB, BL sono uguali alle due GH, GK, l'una all'altra, e comprendono angoli uguali, sarà la base AL uguale alla base GK*. * 4. I.
Or gli angoli in E ed in H sono maggiori dell'angolo ABC, e di essi l'angolo GHK è uguale all'angolo ABL; perciò il rimanente angolo in E sarà maggiore dell'angolo LBC. Laonde essendo le due LB, BC uguali alle due DE, EF, l'una all'altra, e l'angolo DEF maggiore dell'angolo LBC, sarà la base DF maggiore della base LC*. Ma la GK si è dimostrata * 24. I. uguale alla AL; adunque le DF, GK sono maggiori delle AL, LC: sono poi le AL, LC maggiori della AC*; * 20. I. quindi molto più le DF, GK saranno maggiori della AC. Che perciò delle linee rette AC, DF, GK due sono maggiori della rimanente, comunque prese; e quindi si potrà costituire un triangolo da tre linee rette uguali ad esse AC, DF, GK*. C. B. D. * 22. I.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA.

Da tre angoli piani dati, due de' quali sono maggiori del rimanente, comunque presi, costituire l'angolo solido: fa però d'uopo ch' essi tre angoli sieno minori di quattro retti. V. N.

Sieno i tre angoli piani dati ABC, DEF, GHK fig. 21. due de' quali sieno maggiori del terzo, comunque presi, ed essi tre angoli sieno minori di quattro retti: fa d'uopo costituire l'angolo solido con tre angoli uguali ad essi ABC, DEF, GHK.

Si taglino uguali le AB, BC, DE, EF, GH, HK; e giungansi le AC, DF, GK: si potrà costituire un

triangolo con tre linee rette uguali ad esse AC, DF,
* 22. XI. GK*. Si costituisca* e sia LMN, in modo che AC
* 12. I. sia uguale ad LM, DF ad MN, e GK ad LN; poi
* 5. IV. ad un tal triangolo si circonscriva il cerchio LMN*, il cui centro sia X, che cadrà o dentro del triangolo LMN, o in un suo lato, o pur fuori del triangolo.

In primo luogo cada dentro, e si uniscano le LX, MX, NX. Dico che la AB sia maggiore della LX. Imperocchè se non è così la AB sarà uguale alla LX, o pur minore della LX. Sia primieramente uguale. E poichè la AB è uguale alla LX, e la AB è uguale alla BC, la LX alla XM; le due AB, BC saranno uguali alle due LX, XM, l'una all'altra: è pure la base AC uguale alla base LM; quindi l'angolo ABC
* 8. I. è uguale all'angolo LXM*. Per la stessa ragione l'angolo DEF è uguale all'angolo MXN, e l'angolo GHK all'angolo NXL: quindi i tre angoli ABC, DEF, GHK sono uguali a' tre LXM, MXN, NXL. Ma i tre angoli LXM, MXN, NXL sono uguali a quattro ret-
* c. 2. 15. I. ti*; laonde anche gli altri ABC, DEF, GHK saranno uguali a quattro retti. Si sono supposti minori di quattro retti; il che è assurdo: perciò AB non è uguale ad LX. Sia minore; e sopra la linea retta LM, verso quella parte di essa ov'è il centro X si costituisca il triangolo LOM, i cui lati LO, OM siano uguali
* 22. I. alle AB, BC*: e poichè la base LM è uguale alla ba-
* 8. I. se AC, sarà l'angolo LOM uguale all'angolo ABC*. Ma la linea retta AB, o l'altra LO si suppone minore della LX; quindi le LO, MO cadranno dentro del triangolo LXM: mentre se coincidessero con le LX, XM, o pur cadessero fuori, sarebbero uguali, o maggiori delle LX, XM. Adunque l'angolo LOM, o sia ABC è maggiore dell'angolo LXM. Similmente si dimostrerà l'angolo DEF maggiore dell'angolo MXN, e l'angolo GHK maggiore dell'angolo NXL; quindi

i tre angoli ABC, DEF, GHK sono maggiori de' tre LXM, MXN, NXL, cioè di quattro retti*. Ma gli angoli ABC, EDF, GHK si è supposto esser minori di quattro retti; il che è assurdo. Adunque AB non è minore di LX. Si è già dimostrato che non gli è uguale; quindi AB è maggiore di LX.

* c 2. 15. I.

Cada ora il centro X del cerchio in uno de'lati del triangolo, come in MN, e si unisca la LX: dico di nuovo che la AB sia maggiore della LX. Imperocchè se non è così, la AB o è uguale alla LX, o pur minore. Sia in primo luogo uguale: perciò le due AB, BC, ossia DE, EF sono uguali alle due MX, XL, ossia ad MN. Ma la MN si suppone uguale alla DF; quindi le DE, EF sono uguali alla DF; il che è impossibile*. Adunque la AB non è uguale alla LX. Similmente si dimostra, che non è minore della LX; poichè ne seguirebbe molto più un assurdo: quindi la AB è maggiore della LX.

* 20. I.

Il centro X del cerchio sia fuori del triangolo LMN, e si uniscano le LX, MX, NX: dico che sia ancora la AB maggiore della LX. Se non è così, o gli è uguale, o minore. Sia in primo luogo uguale; si dimostrerà del tutto come nel caso primo, che l'angolo ABC sia uguale all'angolo MXL, e l'angolo GHK all'angolo LXN; che perciò tutto l'angolo MXN è uguale a' due ABC, GHK. Ma essi ABC, GHK insieme, sono maggiori dell'angolo DEF; laonde anche l'angolo MXN è maggiore dell'angolo DEF. Or poichè le due DE, EF sono uguali alle due MX, XN, l'una all'altra, e la base DF è pure uguale alla base MN, sarà l'angolo MXN uguale all'angolo DEF*: se n'è dimostrato maggiore; e ciò è un assundo. Adunque la AB non è uguale alla LX. Dico che nè pure la AB sia minore della LX. Poichè, s' è possibile, sia minore; sarà, come si è dimostrato nel primo ca-

* 8. I.

so, l'angolo ABC maggiore dell'angolo MXL, e l'angolo GHK maggiore dell'angolo LXN. Si costituisca alla linea retta BC, e nel punto B in essa l'angolo CBP uguale all'angolo GHK; pongasi la BP uguale alla HK, e si uniscano le CP, AP. E poichè la CB è uguale alla GH, le due CB, BP sono uguali alle due GH, HK, e comprendono angoli uguali; quindi la base CP è uguale alla base GK, o sia LN. Or ne'triangoli isosceli ABC, MXL, poichè l'angolo ABC è maggiore dell'angolo MXL, sarà l'angolo MLX alla base dell'uno maggiore dell'angolo ACB alla base dell'al-

5.e 32. I. tro*. Per la stessa ragione, poichè l'angolo GHK, o sia CBP è maggiore dell'angolo LXN, anche l'angolo XLN sarà maggiore di BCP. Laonde tutto l'angolo MLN è maggiore di tutto l'angolo ACP. E poichè le due ML, LN sono uguali alle due AC, CP, l'una all'altra, e l'angolo MLN è maggiore dell'angolo ACP, sarà anche la base MN maggiore della base

* 24. I. AP*. Ma la MN è uguale alla DF; quindi la DF sarà maggiore della AP: che perciò le due DE, EF sono uguali alle due AB, BP, l'una all'altra, e la base DF è maggiore della base AP, perciò sarà l'angolo DEF maggiore dell'angolo ABP. È poi l'angolo ABP uguale agli angoli ABC, CBP, cioè agli angoli ABC, GHK; quindi l'angolo DEF è maggiore degli angoli ABC, GHK; ma n'è minore, e ciò è impossibile. Adunque la AB non è minore della LX: si è dimostrato, che non gli sia uguale; perciò la AB è maggiore della LX.

Or si tiri dal punto X la XR perpendicolare al pia-

* 12. XI. no del cerchio LMN*. E poichè, in tutt'i casi, la AB si è dimostrata maggiore della LX, si ponga il quadrato, che si descrive dalla RX uguale all'eccesso del qua-

* V. N. drato di AB su quello di LX*, e si uniscano le LR, RM, RN. E poichè la RX è perpendicolare al piano del cerchio LMN, sarà perpendicolare a ciascuna del-

le LX, MX*. Laonde essendo la LX uguale alla XM, e *d.3.XI. comune e ad angoli retti la XR; sarà la base RL uguale alla base RM. Per la stessa ragione la RN è uguale a ciascuna delle RL, RM: laonde le tre RL, RM, RN sono uguali tra loro. E poichè il quadrato della XR si pone uguale all'eccesso del quadrato di AB sul quadrato di LX, sarà il quadrato di AB uguale a'quadrati di LX, XR a'quali è pure uguale il quadrato di RL, perchè è retto l'angolo LXR*: adunque il quadrato *47 I. di AB sarà uguale al quadrato di RL; e perciò AB è uguale ad RL. Ma ad AB gli è uguale ciascuna delle BC, DE, EF, GH, HK; e ad RL gli è uguale ciascuna delle RM, RN: quindi ciascuna delle AB, BC, DE, EF, GH, HK è uguale a ciascuna delle RL, RM, RN. E poichè le due RL, RM sono uguali alle due AB, BC, e la base LM è uguale alla base AC; sarà l'angolo LRM uguale all'angolo ABC. Per la stessa ragione l'angolo MRN è uguale all'angolo DEF, e l'angolo NRL all'angolo GHK. Adunque da' tre angoli piani LRM, MRN, NRL, che sono uguali a' tre angoli piani dati ABC, DEF, GHK si è costituito l'angolo solido in R. C. B. F.

PROPOSIZIONE A.

TEOREMA.

Se a' vertici di due angoli piani uguali si adattino in sublime due linee rette, le quali comprendano angoli uguali co' lati degli angoli proposti, l'uno all'altro; gli angoli solidi, che si verranno in tal modo a costituire a que' punti, saranno uguali. V. N.

Sieno i due angoli piani uguali BAC, EDF, ed a' *fig. 21.* punti A, D si adattino in sublime le linee rette AG,

DP, le quali comprendano angoli uguali, l'uno all' altro, co' lati degli angoli proposti, cioè sia l'angolo GAB uguale a PDE, e l'angolo GAC a PDF: dico che gli angoli solidi, che si verranno in tal modo a costituire ne' punti A, D siano uguali.

Si prendano le AH, DM uguali, e da' punti H, M si tirino le HK, MN rispettivamente perpendicolari a' piani BAC, EDF: poi si tirino da questi punti K, N le perpendicolari KB, KC, NE, NF alle linee rette AB, AC, DE, DF; e finalmente si uniscano le HB, BC, ME, EF. E poichè la HK è perpendicolare al piano BAC, anche il piano HBK, che passa per essa, sarà perpendicolare allo stesso piano BAC*: ma in questo piano BAC si è tirata la AB perpendicolare alla comune sezione BK de' piani BAC, BHK; perciò la AB è perpendicolare al piano HBK, e quindi alla BH, che giace in questo piano. Adunque l'angolo ABH è retto: e similmente si dimostra, che sia retto l'angolo DEM. Laonde i due triangoli HAB, MDE avendo uguali gli angoli ABH, DEM, perchè retti; gli altri loro angoli HAB, MDE essendo pure uguali per supposizione, ed inoltre pareggiandosi i loro lati AH, DM; dovrà essere la AB uguale alla DE*. E similmente, se giungansi le HC, MF, si dimostrerà che la AC sia uguale alla DF. Or essendo la AB uguale alla DE, e la AC alla DF, saranno le due BA, AC uguali alle due DE, DF, l'una all altra: di più queste linee rette uguali comprendono gli angoli uguali BAC, EDF; perciò sarà la BC uguale alla EF, e l'angolo ABC uguale all' angolo DEF*. Ma era l'angolo retto ABK uguale all'angolo retto DEN; quindi il rimanente angolo CBK sarà uguale al rimanente FEN: e così pure si dimostra, che l'angolo BCK sia uguale all altro EFN. Per lo che i due triangoli BCK, EFN avendo due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed il lato BC uguale all altro EF;

* 18. XI.
* d. 4. XI.
* 26. I.
* 4. I.

avranno anche il lato BK uguale al lato EN* : è poi la AB uguale alla DE; perciò le due AB, BK sono uguali alle altre due DE, EN, e comprendono angoli retti; adunque la AK sarà uguale alla DN. Ciò posto il quadrato di AH è uguale a' quadrati di AK, KH, perchè l'angolo AKH è retto* ; e similmente il quadrato di DM pareggia quelli di DN, NM: sono poi uguali non solamente i quadrati di AH e di DM ; ma anche gli altri di AK e di DN. Adunque dovrà il quadrato di HK pareggiar quello di MN, e perciò HK essere uguale ad MN.

* 26. I.

* 47. I.

Or se si concepisca applicarsi l' angolo solido in A all' altro in B, in modo che l' angolo piano BAC combaci col suo uguale EDF, cadranno i punti B, C, ne' punti E, F; e quindi l' angolo ABK combacerà con l' angolo DEN, perchè l' uno e l'altro è retto; e l' angolo ACK con l' angolo DFN, per la stessa ragione: perciò il punto K cadrà in N, e le KH, NM, come perpendicolari a' piani BAC, EDF che coincidono, dovranno pur cadere l' una nell' altra ; quindi essendo esse uguali cadrà il punto H nel punto M, e la HA combacerà con la MD. Adunque i due angoli solidi in A ed in D combacceranno anch' essi, e perciò saranno uguali. C. B. D.

Cor. Da ciò si rileva che: *Se gli angoli solidi in A ed in D sieno contenuti ciascuno da tre angoli piani l' un l' altro uguali e similmente posti, cioè, l' angolo BAC uguale all' angolo EDF, l' angolo BAG uguale all' angolo EDP, e l' angolo GAC all' angolo PDF; e che in due loro lati corrispondenti AG, DP si prendano le uguali linee rette AH, DM, e da' punti H, M si abbassino a' piani in cui esistono gli angoli opposti ad essi lati le perpendicolari HK, MN; queste saranno uguali: e congiunte le AK, DN l' angolo HAK pareggerà l' angolo MDN.*

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

V. N. *Le figure solide contenute dallo stesso numero di piani uguali, simili, e similmente posti, e delle quali ciascun angolo solido sia compreso da tre angoli piani, sono uguali e simili tra loro.*

fig. 23. Sieno le figure solide AG, KQ contenute dallo stesso numero di piani simili; uguali e similmente posti; cioè sia il piano AC uguale e simile al piano KM, il piano AF a KP, BG ad LQ, GD a QN, DE ad NO, e finalmente FH a PR; ed inoltre ciascun loro angolo solido sia compreso da tre angoli piani: dico che la figura solida AG sia uguale e simile all' altra KQ.

Poichè a' vertici A, K degli angoli piani uguali BAE, LKO si sono adattate in sublime le linee rette AD, KN le quali comprendono co' lati degli angoli proposti uguali angoli, l' uno all'altro, cioè l'angolo EAD all'angolo OKN, e l'altro DAB ad NKL; sarà l'angolo solido in A uguale a quello in K*: e similmente si dimostreranno uguali tra loro i rimanenti angoli solidi delle figure proposte. Or se la figura solida AG si applichi alla figura solida KQ, in modo, che la linea retta AB combaci con la KL, e che la figura piana AC combaci con l' altra KM, che gli è uguale e simile; le linee rette AD, DC, CB combaceranno con le KN, NM, ML, i punti A, D, C, B cadranno ne' punti K, N, M, L, e l'angolo solido in A combacerà con l' angolo solido in K. Laonde il piano AF combacerà col piano KP, e la figura AF con la figura KP, per esser queste uguali e simili tra loro. Quindi le linee rette AE, EF, FB combaceranno con le KO, OP,

* A. XI.

PL, ed i punti E, F cadranno in O, P. Similmente si dimostrerà che la figura AH combaci con la KR, la linea retta DH con la NR, e che il punto H cada in R. E poichè l'angolo solido in B è uguale a quello in L, si potrà dimostrare nel modo stesso di poc' anzi, che la figura BG combaci con la LQ, la linea retta CG con la MQ, e che il punto G cada in Q. Adunque tutti i piani e tutti i lati della figura solida AG coincidono co' piani, e co' lati dell' altra figura solida KQ; e perciò la figura solida AG sarà uguale e simile all' altra KQ. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se un solido sia contenuto da piani paralleli, i suoi piani opposti saranno parallelogrammi uguali e simili. V. N.

Il solido BGEC sia contenuto da' piani paralleli AC, GF; BG, CE; BF, AE: dico che i suoi piani opposti siano parallelogrammi uguali e simili. fig. 24.

Poichè i due piani paralleli BG, CE sono segati dal piano AC, saranno parallele le loro comuni sezioni AB, CD*. Similmente essendo paralleli i due piani BF, AE, le intersezioni loro BC, AD col piano AC dovranno esser parallele: e si è dimostrata la AB parallela alla CD; quindi la figura quadrilatera ABCD è un parallelogrammo. E similmente si dimostrerà, ch' è un parallelogrammo ciascuna delle altre figure AH, HE, EC, DG, CH. Ciò posto si congiungano le AH, DF: e poichè la AB è parallela alla DC, e la BH alla CF; saranno le due AB, BH che si toccano parallele alle due che pur si toccano DC, CF, e non so- * 16. XI.

no nel medesimo piano; onde conterranno uguali angoli*: l'angolo dunque ABH è uguale all'angolo DCF. E perchè le due AB, BH sono uguali alle due DC, CF, e l'angolo ABH è uguale all'angolo DCF, sarà la base AH uguale alla base DF, e il triangolo ABH uguale al triangolo DCF*. Ed essendo il parallelogrammo BG doppio del triangolo ABH, ed il parallelogrammo CE doppio del triangolo DCF*, sarà il parallelogrammo BG uguale al parallelogrammo CE. Non altrimenti si dimostrerà che il parallelogrammo DB sia uguale all'altro EH, e che il parallelogrammo CH lo sia all'altro DG.

* 10. XI.
* 4. I.
* 34. I.

Adunque se un solido ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Se un solido parallelepipedo sia segato da un piano parallelo a' piani opposti; sarà come la base alla base, così il solido al solido.

N. B. » Euclide chiama specialmente *solido parallelepido* (che » talvolta diremo semplicemente *parallelepipedo*) quel solido, ch' è » terminato da sei piani, gli opposti de' quali sono paralleli, e che » perciò sono parallelogrammi*.

* 24. XI.

Il solido parallelepipedo ABDC sia segato dal piano FG parallelo a' piani opposti AR, DH: dico che stia la base AF alla base FH, come il solido ABUF al solido EGDC.

Si prolunghi la AH dall'una parte e dall'altra, e si pongano uguali alla EH quante si vogliano HM, MN; uguali poi alla EA quante altre si vogliano AK, KL, e si compiscano i parallelogrammi KY, LO,

HQ, MS, ed i solidi KR, LP, HV, MT. E poichè le linee rette LK, KA, AE sono uguali tra loro, i parallelogrammi LO, KY, AF saranno anche tra loro uguali. Similmente sono tra loro uguali i parallelogrammi KX, KB, AG; come pure tra loro uguali sono gli altri parallelogrammi LZ, KP, AR, che sono opposti*. Nel modo stesso si dimostra, che non solo siano tra loro uguali i parallelogrammi EC, HQ, MS; ma che lo sian pure tra loro gli altri parallelogrammi HG, HI, IN; e finalmente che anche i parallelogrammi HD, MV, NT sieno tra loro uguali. Adunque tre piani del solido LP sono uguali e simili a tre piani del solido KR, ed a tre piani del solido AU, l'uno all'altro. Ma i rimanenti tre opposti a questi, sono uguali e simili rispettivamente ad essi*, e quindi tra loro; e ciascun angolo solido di tali figure solide è contenuto da tre angoli piani: perciò i tre solidi LP, KR, AU saranno tra loro uguali*. Per la stessa ragione anche i tre solidi ED, HV, MT sono uguali tra loro. Laonde quanto è multiplice la base LF della base AF, tant'è multiplice il solido LU del solido AU; e similmente quanto è multiplice la base NF della base HF, altrettanto il solido NU l'è del solido ED. Or se la base LF è uguale alla base NF, il solido LV è uguale al solido NU*; se la base LF è maggiore dell'altra NF, il solido LU sarà maggiore del solido NU; e se minore, minore. Adunque avendo quattro grandezze, cioè le due basi AF, FH, ed i due solidi AU, ED; ed essendosi presi della base AF, e del solido AU qualunque egualmente multiplici, cioè la base LF, ed il solido LU; come anche della base FH, e del solido ED essendosene presi altri ugualmente multiplici qualunque, cioè la base FN, ed il solido NU: si e dimostrato che se la base LF è maggiore della base FN, anche il solido LU è mag-

* 24. XI.
* 24. XI.
* B. XI.
* B. XI.

giore dell' altro NU; se uguale, uguale; e se minore, minore: perciò come la base AF alla base FH così sta
d.5.V. il solido AU al solido ED.

Per la qual cosa se un solido ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXVI.

PROBLEMA.

V. N. *Nella data linea retta, e nel punto dato in essa costituire un angolo solido uguale ad un angolo solido dato, il qual sia contenuto da tre angoli piani.*

fig. 26. Sia data la linea retta AB, ed in essa il punto A, e sia anche dato l' angolo solido in *a*, il quale sia contenuto da' tre angoli piani *bac*, *bad*, *dac*; fa d' uopo costituire nella data linea retta BA, e nel punto A dato in essa un angolo solido uguale al dato in *a*.

Si prenda in uno de' lati *ad* del dato angolo solido in *a* un punto *d*, dal quale si tiri la perpendicolare
*11.XI. *de* sul piano dell' angolo *bac**, che tra quelli i quali comprendono l' angolo solido dato è l' opposto al lato *ad*: poi per lo punto dell' incontro *e* si tiri comunque nel piano dell' angolo *bac* la linea retta *bec*, che incontri i lati *ab*, *ac* di un tal angolo ne' punti *b*, *c*. Ciò posto si costituisca al punto dato A nella linea retta AB l' angolo BAC uguale al dato *bac*, si taglino le BA, AC uguali alle *ba*, *ac*, l'una all' altra, e si congiunga la BC. E perchè i due triangoli BAC, *bac* hanno i lati BA, AC uguali ai lati *ba*, *ac*, l' uno all' altro, e l' angolo BAC è uguale all' altro *bac*; dovrà essere la base BC uguale alla base *bc*, l' angolo ABC
* 4. I. uguale all' angolo *abc*, e l' angolo ACB all' altro *acb**. Ciò posto si tagli dalla BC la BE uguale alla *be*; ed elevata dal punto E la ED perpendicolare al piano

ABC* ed uguale alla *ed*, si congiunga la AD: dico che l' angolo solido che si costituisce in A da' tre angoli piani BAC, BAD, DAC sia uguale all' angolo solido in *a* contenuto dagli altri tre angoli *bac*, *bad*, *dac*. * 12. XI.

Si uniscano le AE, BD; *ae*, *bd*. E poichè i triangoli ABE, *abe* hanno il lato AB uguale al lato *ab*, il lato BE uguale a *be*, e gli angoli ABE, *abe* compresi da questi lati uguali sono anche uguali; dovranno essi avere uguali le loro basi AE, *ae**. Quindi ne' triangoli AED, *aed* rettangoli in E, *e*, essendo rispettivamente uguali i lati intorno agli angoli retti in E, *e*, saranno uguali le loro basi AD, *ad*. E così pure essendo i lati BE, ED intorno all' angolo retto del triangolo BED uguali rispettivamente a' lati *be*, *ed* intorno all' angolo retto dell' altro triangolo *bed*, saranno uguali le loro basi BD, *bd*. Laonde i due triangoli BAD, *bad* avendo i lati BA, AD uguali a' lati *ba*, *ad*, l'uno all' altro, e la base BD uguale alla *bd*; avranno anche l' angolo BAD uguale all' altro *bad**. E nel modo stesso si dimostrerà l' angolo DAC uguale all' altro *dac*. Quindi essendosi a' vertici A, *a* de' due angoli piani uguali BAC, *bac* adattate in sublime le linee rette AD, *ad*, che comprendono angoli uguali co' lati BA, AC; *ba*, *ac* di essi angoli BAC, *bac*, cioè BAD a *bad*, e DAC a *dac*; gli angoli solidi che si sono in tal modo costituiti ne' punti A, *a* saranno uguali*. * 4. I. * 8. I. * A. XI.

E perciò nella data linea retta, e nel dato punto in essa si è costituito un angolo solido uguale ad un angolo solido dato, il quale è compreso da tre angoli piani. C. B F.

PROPOSIZIONE XXVII.

PROBLEMA.

V. N. *Da una data linea retta descrivere un parallelepipedo simile e similmente posto ad un altro dato.*

fig. 27. Sia data la linea retta AB, ed il solido parallelepipedo CD: fa d' uopo dalla data linea retta AB descrivere un solido parallelepipedo simile e similmente posto al dato CD.

Si costituisca nella linea retta AB, e nel punto A dato in essa, un angolo solido uguale all' altro in C

26. XI. del parallelepipedo CD, di modo che quell' angolo solido da costituirsi sia contenuto dagli angoli BAH, HAK, KAB, de' quali sia l' angolo KAB uguale a GCE, l' altro HAK ad FCG, ed HAB ad FCE: di poi si faccia come CE a CG, così BA ad AK, e come GC

12. VI. a CF, così KA ad AH; che perciò per l' equalità ordinata starà ancora come EC a CF, così BA ad AH: finalmente si compisca il parallelogrammo BK, ed il solido AL; sarà questo il parallelepipedo cercato.

E poichè EC sta a CG, come BA ad AK; perciò i due parallelogrammi EG, BK avendo proporzionali i lati intorno agli angoli uguali ECG, BAK, saranno simili: e per la stessa ragione è anche il parallelogrammo KH simile all'altro GF, ed il parallelogrammo HB simile ad FE. Quindi tre parallelogrammi del solido AL sono rispettivamente simili a tre altri parallelogrammi del solido CD. Ma sono poi questi tre piani in ciascun parallelepipedo uguali e simili agli op-

24. XI. posti; e di più gli angoli piani da' quali comprendonsi gli angoli solidi corrispondenti di tali parallelepipedi, sono tra loro uguali e similmente disposti; adun-

que essi angoli solidi sono rispettivamente uguali* Laonde il solido AL sarà simile all'altro CD*. *A.XI. *d.10.XI

E quindi da una data linea retta si è descritto un parallelepipedo simile e similmente posto ad un dato. C. B. F.

LEMMA.

Sieno proposte due grandezze disuguali, e dalla maggiore di esse si levi più che la sua parte qualsivoglia P, (dinotando P la metà, la terza, la quarta parte, ec.); dal residuo si levi pure più che la parte P di esso, e questo si faccia sempre; dovrà finalmente restare una certa grandezza che sarà minore della minore delle proposte. V. N.

Sieno AB, CD le due grandezze disuguali proposte, ed AB la maggiore dalla quale si levi più che la sua parte qualunque P, poi dal residuo si levi anche più che la parte P di esso, e così si faccia sempre; dovrà in fine restare una certa grandezza che sarà minore di CD. fig. 28.

Si prenda di CD quella parte ch' è dinotata dalla P, e sia questa la CE. E poichè la CE multiplicata deve divenire una volta maggiore della AB, sia questo multiplice la FG, ed esso si divida nelle parti FH, HI ec. ciascuna uguale a CE. Ciò fatto si levi dalla AB la AN che sia più della sua parte P; poi dalla NB se ne levi la NO che sia maggiore della parte P di essa, e così in seguito si faccia per tante volte quante sono le parti uguali a CE che si contengono nella FG, meno quel numero ch' è dinotato da P, e si abbia per ultimo residuo OB: dico che questo sia minore della CD.

Imperocchè essendo la FG maggiore della AB, e la

FH minore della parte P della FG, la AN maggiore della parte P della AB, dovrà essere la HG maggiore della NB. Di nuovo poichè la HG è maggiore della NB, togliendo dalla HG la HI ch'è meno della parte P, e dalla NB la NO, ch'è più della sua parte P, rimarrà la IG maggiore della OB. Or lo stesso ragionamento si continui finchè nella FG vi resti tal residuo che contenga il numero P di parti uguali ciascuna alla CE, e questo residuo sia la IG, al quale dovrà necessariamente corrispondere nella AB la OG; e sarà tuttavia la IG maggiore della OB. Ma la IG essendo P di volte la CE, è perciò uguale alla CD. Adunque la OB sarà minore della CD. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

V. N. *Per le diagonali corrispondenti di due piani opposti di un parallelepipedo vi passa un piano, e questo divide per metà quel solido.*

fig. 29. Sia il parallelipedo AF, e sieno DE; BG, le diagonali corrispondenti de' piani opposti CF, AH, quelle cioè che sono tirate tra gli uguali angoli di questi parallelogrammi: dico che per esse DE, BG si passa un piano, e che questo divide per metà il parallelepipedo AF.

Poichè la FH è parallela ed eguale sì alla BD che alla EG, sarà la DB uguale e parallela alla EG; sono poi esse congiunte ne' loro estremi dalle DE, BH; quindi queste congiungenti saranno ancora uguali e parallele* ; che perciò la figura DBGE è un parallelogrammo.

* 33. I.

Or si dividano per metà i lati opposti DF, CE, BH, AG de' parallelogrammi AH, CF ne' punti K,

L, M, N, e si uniscano le KL, MN, KM, LN. E poichè la DK è uguale e parallela alla CL, sarà anche la KL uguale e parallela alla DC; ma la DC è anche uguale e parallela alla BA: adunque sarà la KL uguale e parallela alla BA: che perciò essendo, come poc' anzi, la BA uguale e parallela alla MN, mentre la BM è uguale e parallela alla AN, sarà la KL uguale e parallela alla MN; e perciò per le KL ed MN vi passerà un piano parallelo agli opposti AD, GF del parallelepipedo AF. Inoltre poichè la DK è parallela alla LE, ed esse vengono segate dalla DE, sarà l' angolo KDE uguale all' altro DEL* ; ma sono anche uguali gli angoli al vertice KYD, EYL*, ed è la DK uguale alla LE: quindi sarà la DY uguale alla YE, e la KY uguale alla LY. Similmente si dimostrerà, che il punto S ove intersegansi le MN, BG sia il loro punto medio. E dividendo per metà gli altri lati opposti DC, FE, BA, HG de' medesimi parallelogrammi CF, AH, in X, O, R, P, ed unendo le XO, PR, OR, XP, si dimostrerà, che per le XO, PR vi passi un piano parallelo agli opposti AE, BF del parallelepipedo AF, e che le XO, PR passano per gli punti medj X, S delle DE, BG: che perciò la comune sezione de' piani XR, NK sarà la retta YS la quale unisce i punti medj delle diagonali DE, BG; ed essa esisterà nel piano DBGE che passa per quelle.

* 29. I.

* 15. I.

Ciò posto il parallelepipedo AF resta diviso dal piano NK parallelo a' piani opposti AD, GF in due parallelepipedi uguali tra loro, del pari che le basi AM, NH*; e similmente ciascuno di questi parallelepipedi AK, NF resta diviso dal piano PO parallelo a' rispettivi loro piani opposti in due parti uguali, del pari che le loro basi. Laonde i parallelepipedi AY, SF saranno tra loro uguali, e perciò ciascuno di essi sarà più che la quarta parte del corrispon-

* 25. XI.

dente prisma di cui fa parte, cioè il parallelepipedo AY del prisma BAGDCE, e 'l parallelepipedo SF del prisma DFEBHG. E se in ciascuno de' parallelepipedi NO, PK si faccia la stessa costruzione, che si è fatta nel parallelepipedo AF, si dimostrerà similmente che ciascun de' prismi in cui ognun di essi resta diviso per mezzo del piano DBGE comprenda in se un parallelepipedo che n'è maggiore della quarta parte, e che questi sieno anche tra loro uguali. E lo stesso si potrà continuare a dimostrare per gli altri parallelepipedi che risulteranno da questa seconda divisione che si è fatta de' parallelepipedi PK, NO, e che saranno anche disposti come questi in modo, che i loro piani opposti esistano intorno a' diametri BG, DE.

Or se il prisma BAGDCE non sia uguale all' altro DFEBHG, sia maggiore l'un di essi BAGDCE, e l'eccesso di questo sull'altro CFEBHG sia dinotato dal solido Z. Si divida il parallelepipedo AF come poc' anzi si è detto; poi ciascun de' parallelepipedi PK, NO si divida similmente, e così sempre, si verrà in tal modo facendo a togliere dal prisma BAGDCE, e poi da' residui che da volta in volta si hanno sempre più che la quarta parte, che perciò si dovrà finalmente lasciare una tal differenza tra la somma di que' parallelepipedi che si tolgono, e il prisma BAGDCE che sarà minore di Z*; laonde questa somma di parallelepipedi inscritti nel prisma BAGDCE dovrà esser maggiore dell' altro prisma DFEBHG che si è supposto minore del prisma BAGDCE per la quantità Z. Ma tutti que' parallepipedi inscritti nel prisma BAGDCE sono uguali agli altrettanti corrispondenti, che per mezzo della medesima continua divisione del parallelepipedo AF si vengono a formare nell' altro prisma DFEBHG. Adunque questi saranno insieme presi maggiori del suddetto prisma di cui fan parte. Lo che è impossibi-

*1. prec.

le. E perciò il prisma BAGDCE non potrà esser disuguale all'altro BHGDFE; e quindi gli sarà uguale. C. B. D.

Scol. Si tiri nel nel parallelepipedo AF la diagonale sua DG; esisterà questa retta nel piano del parallelogrammo DBGE, e quindi s'intersegherà in un punto T colla YS, che si è veduto essere la comune sezione de' piani PO, KN: ed i triangoli DTY, STG avendo, per le parallele DE, BG, l'angolo TDY uguale all'angolo TGS, e l'angolo TYD uguale all'altro TSG, e di più il lato DY uguale al lato SG, dovranno avere l'altro lato TY uguale a TS, e TD uguale a TG. Che perciò:

Se in un parallelepipedo si dividano per metà i lati di due piani opposti, e per le sezioni corrispondenti si facciano passare i piani; la comune sezione di questi piani, e la diagonale del parallelepipedo si divideranno scambievolmente per metà.

La qual verità è la prop. XXXIX. del presente libro presso Euclide

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

I solidi parallelepipedi che hanno la medesima base e l'altezza stessa, ed i cui lati insistenti alla base vanno a costituirsi nelle stesse linee rette, sono uguali tra loro. V. N.

Sieno nella stessa base AB i solidi parallelepipedi ugualmente alti AH, AK, i cui lati AF, AG; LM, LN; CD, CE, BH, BK, che insistono alla base comune, vanno a costituirsi nelle stesse linee rette FN, DK: dico che il solido AH sia uguale all'altro AK. fig. 30.

Imperocchè essendo un parallelogrammo sì CH, che CK, sarà la CB uguale all'una, e l'altra di esse DH, EK; onde ancor la DH è uguale all'EK: quindi dovrà esser pure DE uguale ad HK; e perciò il triangolo CDE è uguale al triangolo BHK. Per la stessa ragione il triangolo AFG è uguale al triangolo LMN: è poi il parallelogrammo DG uguale al parallelogrammo HN*; ed è inoltre il parallelogrammo CF uguale al parallelogrammo BM, perchè sono opposti; e similmente il parallelogrammo CG è uguale all'altro BN: adunque il prisma contenuto da' due triangoli AFG, CDE, e da' tre parallelogrammi AD, DG, GC è uguale al prisma, che si contiene da' due triangoli LMN, BHK, e da' tre parallelogrammi BM, MK, KL. Laonde togliendo dal solido ALBCDFNK il prisma LMNBHK, e poi dallo stesso solido togliendo un'altra volta l'altro prisma AFGCDE, sarà il solido che si ottiene per primo residuo, cioè il parallelepipedo AH, uguale all'altro solido che si ha per secondo residuo, cioè al parallelepipedo AK.

* 36. I.

Laonde i solidi parallelepipedi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

V. N. *I solidi parallelepipedi che hanno la base stessa e la medesima altezza, ed i cui lati insistenti alla base non vanno a costituirsi nelle stesse linee rette, sono uguali tra loro.*

fig. 31. Sieno nella stessa base AB i solidi parallelepipedi ugualmente alti BF, AK, ed i loro lati AF, AG, LM, LN; CD, CE, BH, BK, che insistono alla base comune AB, non si vadano a costituire nelle stesse li-

nee rette: dico che il solido AH sia uguale all' altro AK.

Si prolunghino le FD, MH, e le NG, KE finchè convengano ne' punti O, P, Q, R, e si uniscano le AO, LP, BQ, CR. Ed essendo il piano ALNG parallelo all' altro CBKE, dovrà anche il piano ALPO, ch'è nel prolungamento del primo, esser parallelo al piano CBQR, ch' è nel prolungamento del secondo. E similmente il piano LPQB, ch'è nel prolungamento di LMHB, sarà parallelo al piano AORC, ch' è il prolungamento dell' altro AFDC. È poi il piano PQRO parallelo al piano ALBC. Adunque il solido ALBCOPQR è terminato da sei piani, de' quali gli opposti sono paralleli; perciò sarà un parallelepipedo. Or il parallelepipedo AH è uguale al parallelepido AQ; poichè consistono sopra la stessa base, sono ugualmente alti, e le linee rette AF, AO, CD, CR; LM, LP, BH, BQ insistenti alla base vanno a costituirsi nelle stesse linee rette FR, MQ*: ed è poi lo stesso solido AQ uguale all' altro AK; perchè anche questi hanno la medesima base ALBC, sono ugualmente alti, e le linee rette AO, AG, LP, LN; CR, CE, BQ, BK, che insistono alla base, vanno a costituirsi nelle linee rette ON, RK. Adunque il parallelepipedo AH sarà uguale all' altro AK.

* 29. XI.

Laonde i solidi parallelepipedi ec. C. B. D.

Cor. Quindi se nel parallelepipedo AH i lati FA, DC, HB, ML insistenti alla base AB sieno a questa inclinati: da' punti A, C, B, L si elevino ad essa le perpendicolari AO, CR, BQ, LP, le quali incontrino il piano FH opposto alla base AB ne' punti O, R, Q, P, e si uniscano le OR, RQ, QP, PO. E poichè le AO, LP sono perpendicolari allo stesso piano ACBL, sono anche parallele*: ma è pure la AC parallela alla LB; quindi il piano CAOR, che passa per le

V. N.

* 6. XI.

AC, AO sarà parallelo all' altro piano BLPQ, che
* 15.XI. passa per le LB, LP*. Similmente si dimostra essere il piano CQ parallelo all' altro AP; ed i piani AB, OQ sono già paralleli. Adunque il solido AQ è un
* 30.XI. parallelepipedo, ed è uguale all' altro AH*. Laonde *Ogni parallelepipedo i cui lati insistenti alla base sieno a questa obbliqui, è uguale a quel parallelepipedo ugualmente alto, che ha la stessa base, ed i lati insistenti alla base perpendicolari ad essa.*

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

V. N. *I solidi parallelepipedi che hanno basi uguali e la medesima altezza, sono uguali tra loro.*

fig. 32. Sieno i solidi parallelepipedi LK, LP posti nelle uguali basi AB, LCOD, ed abbiano la medesima altezza: dico che il solido LK sia uguale all' altro LP.

In primo luogo si supponga che i lati di questi tali solidi, che insistono alle basi AB, LO, sieno perpendicolari ad esse; e si dispongano i solidi in tal modo, che le basi si trovino in un medesimo piano, ed i lati CL, LA di queste stieno per diritto; dovrà la linea retta LM, che insiste ad esse basi nel punto L esser
* 13.XI. comune a' due solidi LK, LP*. Sieno inoltre le AG, HK, BE; DF, OP, CN que' rimanenti lati de' due parallelepipedi che insistono alle basi; e se mai l' angolo ALB non è uguale all' altro DLC, si prolunghino le BL, OD finchè s' incontrino in I, e per C si tiri la QGR parallela alla BLI, che incontri in R la BH prolungata. Finalmente si compiscano i solidi LS, LT. Ciò posto il solido LT, il quale ha per base il parallelogrammo LN, e per piano opposto a questa l'altro

parallelogrammo IF, è uguale al solido LP, la cui base è lo stesso parallelogrammo LN, e DP è il piano opposto; poichè essi hanno anche la medesima altezza, ed i loro lati MV, MF, NT, NP; LI, LD, CQ, CO insistenti alla comune base cadono nelle stesse linee rette PV, OI*. Or, il parallelogrammo CD è uguale al parallelogrammo CI, perchè sono posti sopra la stessa base LC, e tra le medesime parallele LC, OI*; ed il parallelogrammo DC si è supposto uguale all' altro AB; quindi sarà il parallelogrammo IC uguale ad esso AB; perciò questi due parallelogrammi IC, AB serberanno uguali ragioni al terzo parallelogrammo LR, e sarà IC ad LR, come AB ad LR. Ma IC sta ad LR, come il parallelepipedo IN all' altro LS; poichè l' intero parallelepipedo IS si è diviso col piano MLCN parallelo a' piani opposti IT, BS*. E similmente, essendosi il parallelepipedo AS diviso col piano LBEM parallelo a' piani opposti AK, CS, sta il parallelepipedo LK all' altro LS, come la base AB all' altra LR. Quindi sta il parallelepipedo IN al parallelepipedo LS, come l' altro LK allo stesso LS: laonde i due parallelepipedi IN ed LK sono uguali*. Ma il parallelepipedo IN si è dimostrato uguale all' altro LP; perciò sarà anche questo parallelepipedo LP uguale all' altro LK.

* 29.XI.

* 35. I.

* 25.XI.

* 9. V.

Che se i lati insistenti alle basi de' due parallelepipedi proposti si suppongano ad esse obbliqui: siccome ciascun di questi parallelepipedi pareggia quell' altro, ch' è ugualmente alto, posto sulla stessa base, ed ha i lati insistenti a questa perpendicolari ad essa*; e che tali solidi si sono poc' anzi dimostrati uguali: perciò anche i proposti saranno tra loro uguali.

* c.30XI.

Adunque i parallelepipedi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

V. N. *I solidi parallelepipedi che hanno la medesima altezza, sono tra loro come le basi.*

fig. 33. Sieno AB, CD i solidi parallelepipedi della medesima altezza: dico che stia l'un solido all'altro, come la base AE all'altra CF.

Si applichi al lato FG della base CF di uno di questi solidi il parallelogrammo FH uguale all'altro AE, in modo che l'angolo FGH sia uguale all'angolo LCG; poi si compia il parallelepipedo GK, la cui base sia FH, ed una delle linee rette ad essa insistenti sia FD: sarà un tal solido GK uguale al proposto AB; poichè sono costituiti nelle uguali basi AE, FH, e sono ugualmente alti*. Ed essendo tutto il parallelepipedo CK diviso dal piano GD parallelo ai suoi piani opposti CP, HK, dovrà stare il solido GK, o il suo uguale AB, all'altro CD, come la base FH, o l'altra uguale AE, alla base CF*.

* 31. XI.

* 25. XI.

E perciò i parallelepipedi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

I parallelepipedi simili sono tra loro in ragion triplicata di quella che hanno i lati omologhi.

fig. 34. Sieno i parallelepipedi simili AB, CD, ed il lato AE dell'uno sia omologo al lato CF dell'altro; dico

che il solido AB stia all' altro CD in triplicata ragione di AE a CF.

Si prolunghino i lati AE, GE, HE in K, L, M, e si ponga EK uguale a CF, EL ad FN, ed EM ad FR; indi si compia il parallelogrammo KL, ed il solido KO. E poichè le due linee rette KE, EL sono uguali alle CF, FN, l'una all'altra, e l'angolo KEL è uguale all'angolo NFC, mentre il primo di essi è uguale all'angolo GEA con cui sta al vertice, e l'altro è pure uguale a questo stesso angolo GEA, per la similitudine de' solidi AB, CD*; perciò sarà il parallelogrammo KL uguale e simile all' altro CN: e, dimostrandosi similmente che il parallelogrammo KM sia uguale e simile all' altro CR, ed il parallelogrammo LM all'altro FD; saranno tre parallelogrammi del solido KO uguali e simili, l'uno all'altro, a tre altri del solido CD. Ma i tre rimanenti opposti a questi sono anche uguali e simili rispettivamente ad essi; quindi il solido KO è uguale e simile all' altro CD*. Ciò posto, compiasi l' altro parallelogrammo GK, e poi sulle basi GK, KL si costituiscano i solidi EX, LP della stessa altezza del solido AB, ed in modo, che la linea EH sia un loro lato comune. E poichè per la similitudine de' solidi AB, CD, e permutando sta AE a CF, come EG ad FN, e come EH ad FR; ed FC è uguale ad EK, FN ad EL, ed FR ad EM; sarà perciò come AE ad EK, così EG ad EL, ed HE ad EM. Ma come AE ad EK, così sta il parallelogrammo AG all' altro GK*; e come GE ad EL, così è pure GK a KL; e come HE ad EM, così sta anche PE a KM. Adunque come il parallelogrammo AG all' altro GK, così sta GK a KL, e PE a KM. È poi AG a GK, come il parallelepipedo AB all'altro EX*; GK a KL, come il parallelepipedo EX all' altro LP; e PE a KM, come il parallelepipedo LP all' altro KO.

* d. 10. XI

* B. XI.

* 1. VI.

* 32. XI.

Laonde come il solido AB al solido EX, così starà questo stesso EX al terzo LP, ed il terzo LP al quarto OK. Or se quattro grandezze sono in continua proporzione, la prima si dice avere alla quarta triplicata ragione di quella che ha alla seconda*; adunque il solido AB serberà al solido KO, o al suo uguale CD triplicata ragione di quella dello stesso AB ad EX. Ma la ragione del solido AB all'altro EX, poc'anzi si è dimostrato pareggiar quella di AE ad EK, o sia CF; quindi il solido AB starà all'altro CD in triplicata ragione del lato AE del primo, all'omologo CF dell'altro. C. B. D.

*d. II. V.

Cor. Da ciò è chiaro, che: *Se quattro linee rette sieno continuamente proporzionali, la prima di esse starà alla quarta, come il parallelepipedo che ha per lato la prima all'altro simile e similmente posto che ha per lato omologo la seconda.* Imperocchè la prima di esse sta alla quarta in triplicata ragione della prima alla seconda.

PROPOSIZIONE C.

TEOREMA.

V. N. *I parallelepipedi contenuti da parallelogrammi equiangoli tra loro, l'uno all'altro, cioè quelli i cui angoli solidi sono tra loro uguali, sono in ragion composta dalle ragioni de' lati intorno a questi angoli.*

fig. 35. Sieno i parallelepipedi AB, CD, de' quali AB è contenuto da' parallelogrammi AE, AF, AG, che sono equiangoli, l'uno all'altro, a' parallelogrammi KL, LH KH, da' quali è contenuto l'altro parallelepipedo CD; dico che la ragione che ha il solido AB al solido CD

sia composta dalle ragioni di AM a DL, di AN a DK, e di AO a DH.

Si prolunghino le MA, NA, OA in P, Q, R, in modo tale che AP sia uguale a DL, AQ a DK, ed AR a DH; e poi si compisca il parallelepipedo AX contenuto da' parallelogrammi AS, AT, AV uguali e simili, l' uno all' altro, agli altri parallelogrammi KL, HL, KH; che perciò un tal solido AX è uguale e simile all' altro CD*. Si compisca anche il parallelepipedo AY la cui base è il parallelogrammo AS, ed AO è una delle linee rette insistenti alla base: indi si esponga una qualunque linea retta a, e si faccia come AM ad AP, così a ad un' altra linea retta b, come NA ad AQ, così b a c, e come OA ad AR, così c a d. E poichè il parallelogrammo AE è equiangolo all' altro AS, sarà AE ad AS in ragion composta di MA ad AP, e di NA ad AQ*; o sia delle loro uguali di a a b, e di b a c, cioè come a a c*. Ma i parallelepipedi AB, AY essendo costituiti tra gli stessi piani paralleli BOY, EAS, e perciò avendo la stess' altezza, sono l' uno all' altro, come la base AE alla base AS, cioè come a a c: ed il parallelepipedo AY sta all' altro AX, come la base OQ alla base QR*, cioè come OA ad AR, o sia come c a d. Per la qual cosa essendo il solido AB al solido AY, come la retta a all' altra c, ed il solido AY al solido AX, come c a d, sarà, per equalità, il solido AB al solido AX o sia CD, come a a d. Ma la ragione di a a d è composta dalle ragioni di a a b, di b a c, e di c a d*, le quali sono le stesse, ciascuna a ciascuna, con le ragioni di MA ad AP, di NA ad AQ, e di OA ad AR; ed i lati AP, AQ, AR sono uguali a' lati DL, DK, DH, l' uno all' altro. Adunque il solido AB sta al solido CD in ragion

* B. XI.

* 23. VI.

* d. A. V.

* 25. XI.

* d. A. V.

composta dalle ragioni de' lati intorno agli angoli uguali, cioè di AM a DL, di AN a DK, e di AO a DH. E perciò i parallelepipedi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

V. N. *Le basi de' solidi parallelepipedi uguali sono reciprocamente proporzionali alle altezze: e sono uguali que' solidi parallelepipedi, che hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze.*

fig. 36. Sieno i solidi parallelepipedi uguali AB, CD: dico, che le loro basi sieno reciprocamente proporzionali alle altezze, cioè che stia la base AL alla base CO, come l'altezza del solido CD a quella dell'altro AB.

Primieramente i loro lati AG, EF, LB, HK; CM, NX, OD, PR che insistono alle basi AL, CO, sieno perpendicolari a queste; saranno, com'è chiaro, le AG, CM le respettive altezze de' parallelepipedi proposti: e se si supponga che queste sieno uguali, in tal caso dovendo stare l'un parallelepipedo AB all'altro CD, come la base AL alla base CO*, saranno uguali queste basi, del pari che i solidi AB, CO*; e quindi si potrà conchiudere AL a CO, come CM ad AG. Che se poi le altezze AG, CM non sono uguali; sia CM la maggiore di esse, dalla quale si tagli la CT uguale alla AG, e si compisca il solido CQ: serberà a questo ugual ragione ciascuno de' dati, perchè uguali*; e quindi starà AB a CQ, come CD a CQ. Ma il solido AB sta all'altro CQ, come la base AL alla base CO; poichè essi sono ugualmente alti*: ed è poi il solido CD allo stesso CQ, come la base MP alla base PT*, cioè come CM a CT o ad AG; edunque starà

* 32. XI.
* A. V.
* 7. V.
* 32. XI.
* 25. XI.

AL a CO, come CM ad AG. E perciò le basi de' parallelepipedi AB, CD sono reciprocamente proporzionali alle altezze.

Sieno ora le basi de' proposti parallelepipedi AB, CD reciprocamente proporzionali alle altezze, cioè stia la base AL alla base CO, come l' altezza CM del solido CD all' altezza AG del solido AB: dico che il solido AB sia uguale all' altro CD.

Poichè essendo AL a CO, come CM ad AG, è chiaro che se le altezze AG, CM sieno uguali, debbano anche pareggiarsi le basi AL, CO*, ed esser quindi uguali i parallelepipedi proposti*. Che se poi si supponga essere CM maggiore di AG, si tagli dalla CM la CT uguale alla AG, e si compisca il solido CQ. E poichè sta il solido AB all' altro CQ, come la base AL alla base CO*; ed è poi l' altro solido CD allo stesso CQ, come la base PM alla base PT*, e quindi come CM a CT o ad AG: le prime ragioni di queste due proporzioni saranno uguali del pari che le seconde; e sarà perciò AB a CQ, come CD a CQ: laonde i solidi AB e CD serbando ragioni uguali allo stesso solido CQ, saranno uguali*.

* A. V.
* 31. XI.
* 32. XI.
* 25. XI.
* 9. V.

Che se que' lati de' parallelepipedi proposti, che insistono alle basi non sieno a queste perpendicolari: siccome tali parallelepipedi ne pareggiano respettivamente due altri, che hanno con essi le stesse basi, le medesime altezze, ed i lati insistenti alle basi perpendicolari a queste*; ne segue, che siccome si è dimostrato per questi secondi, che essendo essi uguali, le loro basi sieno reciprocamente proporzionali alle altezze; e che al contrario se le basi sieno reciprocamente proporzionali alle altezze, tali solidi sieno uguali; lo

* 30. XI.

stesso debba anche aver luogo pe' primi; cioè per quelli i cui lati insistenti alle basi sieno ad esse obbliqui.

E perciò i parallelepipedi ec. C. B. D.

N. B. » Ciò che si dimostra da Euclide nella Proposizione » XXXV. e nel suo Corollario, si è da noi già recato nel Corollario della Proposizione A di questo stesso Libro (*Vegg. le Note*).

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

V. N. *Se tre linee rette sieno proporzionali, il solido parallelepipedo fatto da esse sarà uguale a quello equiangolo che si fa dalla media, e ch' è equilatero.*

fig. 37. Sieno A, B, C tre linee rette proporzionali, cioè stia A a B, come B a C: dico che il solido parallelepipedo che si fa da esse A, B, C sia uguale al solido parallelepipedo equiangolo all' altro che si fa da B, e ch' è equilatero

26. XI. Si esponga l'angolo solido in E, contenuto da' tre angoli piani FED, FEG, GED, e prese ne' suoi lati le EF, EG, ed ED uguali, l'una all'altra, alle tre linee rette date A, B, C, si compia il parallelepipedo EK; e poi ad una linea retta LN uguale alla B, in un suo estremo L, si costituisca un angolo solido

26. XI. uguale all' altro ch' è in E, e prese negli altri due lati di questo angolo le parti LX, LM uguali alla LN, si compisca l' altro parallelepipedo LH.

E poichè A sta a B, come B a C, ed A è uguale ad EF, B a ciascuna delle LM, LN, e C ad ED; starà pure FE ad ML, come LN ad ED: perciò i parallelogrammi FD, MN che hanno, per costruzione, uguali gli angoli in E, ed in L, avendo reciproca-

mente proporzionali i lati intorno a questi angoli, saranno uguali*. Or essendosi adattate a' vertici L ed E de' due angoli piani uguali MLN, FED le due linee rette sublimi ed uguali LX ed EG, le quali comprendono con le LM, LN; FE, ED angoli uguali, l' uno all' altro, e similmente posti; le perpendicolari che da' punti X e G si abbassano su i piani MN ed FD debbono essere uguali*. Adunque i parallelepipedi LH ed EK costituiti dalle tre linee rette A, B, C nel modo già detto, avendo uguali le loro basi MN ed FD, ed uguali anche le loro altezze, saranno uguali*. E perciò se tre linee rette sieno proporzionali ec.

* 14. VI.

* c. 4. XI.

* 31. XI.

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

Se quattro linee rette sieno proporzionali, i solidi parallelepipedi simili, e similmente posti che da esse descrivonsi saranno ancora proporzionali. E se i solidi parallelepipedi simili, e similmente posti che descrivonsi da quattro linee rette sieno proporzionali; anch' esse linee rette saranno proporzionali.

V. N.

Sieno AB, CD, EF, GH quattro linee rette proporzionali, cioè stia AB a CD, come EF a GH, e si descrivano dalle due AB, CD i solidi parallelepipedi simili e similmente posti AK, CL; e dalle altre due EF, GH gli altri solidi parallelepipedi anche simili e similmente posti EM, GN: dico che stia il parallelepipedo AK all' altro CL, come il parallelepipedo EM all' altro GN.

fig. 38.

Si facciano continuamente proporzionali le AB, CD, O e P; come pure le EF, GH, Q ed R. E poichè AB sta a CD, come EF a GH; sarà anche CD ad O,

come GH a Q; ed O a P, come Q ad R: quindi le quattro grandezze AB, CD, O e P saranno in ordinata ragione con le altre quattro EF, GH, Q ed R; e perciò starà AB a P, come EF ad R*. Ma come AB a P, così sta il solido AK all' altro CL*; e come EF ad R, così è pure il solido EM al solido GN. Adunque come il solido AK al solido CL, così sta il solido EM al solido GN.

* 22. V.

* 33. XI.

Sia adesso il solido AK al solido CL, come il solido EM al solido GN: dico che stia anche la linea retta AB all' altra CD, come la EF alla GH.

Imperocchè si faccia come la AB alla CD, così la EF alla ST, e poi si descriva dalla ST un solido parallelepipedo SV simile e similmente posto ad EM, o pure a GN*. E poichè come AB a CD, così sta EF ad ST, e si sono descritti dalle AB, CD i parallelepipedi AK, CL simili e similmente posti; come pure dalle EF, ST gli altri EM, SV anche simili e similmente posti; sarà quindi AK a CL, come EM ad SV. Ma si è supposto essere AK a CL, come EM a GN; laonde starà il solido EM al solido GN, come lo stesso EM all' altro SV; e perciò il solido GN è uguale al solido SV*: gli è anche simile e similmente posto; adunque i piani da' quali essi sono contenuti sono uguali e simili; e saranno uguali i loro lati omologhi GH, ST. Per lo che essendo AB a CD, come EF ad ST, ed ST uguale a GH; sarà AB a CD, come EF a GH.

* 27. XI.

* 9. V.

Adunque se quattro linee rette ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

Se un piano sia perpendicolare ad un altro piano, e da qualunque punto preso in uno di essi si tiri la perpendicolare all' altro; questa caderà nella loro comune sezione. V. N.

Sia il piano CD perpendicolare all' altro AB, ed AD sia la loro comune sezione; e da un qualunque punto E preso nel piano CD si tiri al piano AB la perpendicolare: dico che questa debba cadere nella AD. *fig.* 39.

S' è possibile cada fuori della AD, come la EF, ed incontri in F il piano AB: dal punto F ch' è nel piano AB si abbassi sulla AD la perpendicolare FG, la quale sarà anche perpendicolare al piano CD*, e si unisca la EG. E poichè la FG è perpendicolare al piano CD, ed è toccata nel punto G dalla EG, che si trova in questo piano; perciò l' angolo FGE sarà retto*. Ma la EF è perpendicolare al piano AB, e quindi è anche retto l' angolo EFG. Laonde nel trigolo EFG vi sarebbero due angoli retti; il che è assurdo*. Adunque la perpendicolare abbassata dal punto E sul piano AB non caderà al di fuori della AD; ma bensì in questa retta.

* *d.* 4. XI.
* *d.* 3. XI.
* 15. I.

E perciò se un piano ec. C. B. D.

N. B. La Prop. XXXIX. ritrovasi già da noi dedotta per Corollario dalla Prop. 28. (*Vegg. le Note*)

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

Se sieno due prismi triangolari ugualmente alti, uno de' quali abbia per base un parallelogrammo, e l'altro un triangolo, e quel parallelogrammo sia doppio di questo triangolo; essi prismi saranno uguali fra loro.

fig. 40. Sieno ABECDF, GHKLMN due prismi triangolari ugualmente alti, il primo de' quali è contenuto da' due triangoli ABE, CDE, e da' tre parallelogrammi AD, DE, EC, e l'altro contiensi da' due triangoli GHK, LMN, e da' tre parallelogrammi LH, HN, NG; e di più per lo primo di essi si prenda per base il parallelogrammo AF, e per l'altro il triangolo GHK, e quel parallelogrammo sia doppio di questo triangolo: dico che il prisma ABECDF sia uguale al prisma GHKLMN.

Si compiscano i solidi ED, GO. E poichè il parallelogrammo AF è doppio del triangolo GHK, del quale è anche doppio il parallelogrammo HK; sarà il parallelogrammo AF uguale al parallelogrammo HK. Laonde i due parallelepipedi ED, GO avendo uguali le basi AF, HK, e la medesima altezza, saranno uguali*; e perciò dovranno anche essere uguali i prismi proposti ABECDF, GHKLMN, i quali sono respettivamente le metà di que' parellelepipedi*.

* 31.XI.

* 28.XI.

Quindi se sieno due prismi ec. C. B. D.

FINE DEL LIBRO XI.

IL DUODECIMO LIBRO

DEGLI

ELEMENTI DI EUCLIDE

(DELLA GEOMETRIA L' OTTAVO)

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I poligoni simili inscritti ne' cerchi, sono fra loro come i quadrati de' diametri. V. N.

Sieno i cerchi ABCDE, FGHKL, ed in essi sieno inscritti i poligoni simili ABCDE, FGHKL: dico che stia il quadrato del diametro BM a quello del diametro GN, come il poligono ABCDE all' altro FGHKL. *fig.* 41.

Si congiungano le BE, AM; GL, FN. E poichè il poligono ABCDE è simile al poligono FGHKL, e che i poligoni simili si dividono in triangoli simili*, sarà perciò il triangolo BAE simile, e quindi equiangolo al triangolo GFL; laonde l' angolo BEA è uguale all' altro GLF. Ma l' angolo AEB è uguale all'altro AMB, perchè poggiano sulla stessa circonferenza*; e l' angolo FLG, per la stessa ragione, è uguale all'angolo FNG. Adunque saranno anche tra loro uguali questi due altri angoli BMA, GNF: è poi l' angolo retto BAM uguale al retto GFN; quindi i rimanenti angoli de' triangoli ABM, FGM saranno uguali, e perciò essi trian-

* 20. VI.

* 21. III.

* 4. VI. goli saranno simili* ; e starà BA a GF, come BM a GN ; ed il quadrato di BA a quello di GF, come il quadrato di *22. VI. BM all'altro di GN*. Ma il quadrato di BA sta all'altro di GF, come il poligono ABCDE all'altro FGHKL; perchè sì quei quadrati, che questi poligoni sono tra *c. 2. 20 VI. *12. V. loro in duplicata ragione di BA a GF*. Adunque starà pure quel poligono a questo, come il quadrato di BM a quello di GN.

E perciò i poligoni simili ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

V. N. *I cerchi sono fra loro come i quadrati de' diametri.*

fig. 43. Sieno i cerchi ABCD, EFGH, e BE, FH, i loro diametri: dico che il quadrato di BD stia al quadrato di FH, come il cerchio ABCD al cerchio EFGH.

Imperocchè, se non è così, sarà come il quadrato di BD a quello di FH, così il cerchio ABCD ad uno spazio minore del cerchio EFGH, o pur maggiore. Sia primieramente ad uno minore, che sia S. Nel cerchio EFGH descrivasi il quadrato EFGH: e poichè il quadrato, ch'è descritto nel cerchio, è maggiore della metà del cerchio EFGH, perchè, se tiriamo per i punti E, F, G, H linee rette, che tocchino il cerchio, sarà il quadrato EFGH la metà del quadrato descritto dintorno al cerchio; ma il cerchio è minore del quadrato descritto dintorno ad esso; adunque il quadrato EFGH è maggiore della metà del cerchio EFGH. Seghinsi per mezzo le circonferenze EF, FG, GH, HE ne' punti K, L, M, N, e giungansi le EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE: adunque ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH,

HNE è maggiore che la metà della porzione del cerchio nella quale egli consiste; perchè se tiriamo per i punti K, L, M, N linee rette, che tocchino il cerchio, e finiamo i parallelogrammi, che sono nelle linee rette EF, FG, GH, HE, sarà ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMN, HNE la metà del parallelogrammo nel quale è descritto*: ma la porzione è minore del parallelogrammo; adunque ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore che la metà della porzione del cerchio nella quale consiste. Laonde segando l'altre circonferenze per mezzo, e giungendo le linee rette, e facendo questo sempre; lasceremo alla fine alcune porzioni del cerchio, che saranno minori dell'eccesso nel quale il cerchio EFGH avanza lo spazio S. Siano dunque lasciate le porzioni del cerchio EFGH nelle linee rette EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, che siano minori dell' eccesso, nel quale il cerchio EFGH avanza lo spazio S; adunque il rimanente poligono EKFLGMHN sarà maggiore dello spazio S. Descrivasi ancora nel cerchio ABCD il poligono AXBOCPDR simile al poligono EKFLGMHN; adunque come il quadrato di BD al quadrato di FH, così è il poligono AXBOCPDR al poligono EKFLGMHN*: ma come il quadrato di BD al quadrato di FH, così è il cerchio ABCD allo spazio S; adunque eziandio come il cerchio ABCD allo spazio S; così è il poligono AXBOCPDR al poligono EKFLGMHN. Ma il cerchio ABCD è maggiore del poligono AXBOCPDR che è in esso; onde ancora lo spazio S è maggiore del poligono EKFLGMHN*: ma è minore, che è impossibile. Non è dunque come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD a qualche spazio minore del cerchio EFGH. Similmente dimostreremo non essere come il quadrato di FH al quadrato di BD, così il cer-

* 41. I.

* 1. XII.

* 14. V.

chio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD.

Dico ora nè anche essere come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD a qualche spazio maggiore del cerchio EFGH. Perciocchè, se egli è possibile, sia ad uno spazio maggiore T; sarà dunque, invertendo, come il quadrato di FH al quadrato di BD, così lo spazio T al cerchio ABCD*: ma come lo spazio T al cerchio ABCD, così è il cerchio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD*; adunque è come il quadrato di FH al quadrato di BD, così il cerchio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD: lo che si è dimostrato impossibile. Non è dunque come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD ad uno spazio maggiore del cerchio EFGH: e si è dimostrato non essere anche ad un minore; onde come il quadrado di BD al quadrato di FH, così sarà il cerchio ABCD al cerchio EFGH.

* C. V.

* 14. V.

Laonde i cerchi fra loro sono come i quadrati de' diametri. C. B. D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA,

F. N. *Ogni piramide che ha la base triangolare si divide in due piramidi uguali, e simili tra loro, che hanno le basi triangolari, e simili all' intera; ed in due prismi uguali, i quali sono maggiori della metà di tutta la piramide.*

fig. 43. Sia la piramide che ha per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D: dico che una tal piramide ABCD si divide in due piramidi uguali e simili tra loro, che hanno le basi triangolari, e simili all' in-

tera; ed in due prismi uguali, i quali sono maggiori della metà di tutta la piramide.

Si dividano per metà i lati AB, BC, CA, AD, DB, DC de' triangoli che terminano la piramide triangolare ABCD in E, F, G, H, K, L, e si uniscano le EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG. E poichè AE è uguale ad EB, ed AH ad HD; sarà EH parallela a DB*. Per la stessa ragione anche HK è parallela ad AB: adunque la figura HEBK è un parallelogrammo; e perciò HK è uguale ad EB, e quindi ad AE; ed EH è uguale a BK, o sia a KD*. Laonde i due triangoli EAH, KHD, avendo i lati EA, AH uguali a' lati KH, HD, l'uno all'altro, e la base EH uguale alla base KD, saranno uguali e simili: e per la stessa ragione il triangolo AHG è pure uguale e simile al triangolo HDL. Or perchè le due linee rette EH, HG che si toccano sono respettivamente parallele a due linee rette che pur si toccano KD, DL, ma non nel medesimo piano; perciò l'angolo EHG contenuto dalle prime è uguale all'altro KDL che si comprende dalle altre*: ma sono anche uguali, l'uno all'altro, i lati che comprendono questi angoli; quindi i triangoli EHG, KDL saranno uguali e simili; e perciò la base EG sarà uguale alla base KL. Inoltre i tre lati EA, AG, GE del triangolo EAG, essendo uguali, l'uno all'altro, a' lati KH, HL, LK dell'altro triangolo KHL; dovrà anche il triangolo EAG essere uguale e simile all'altro KHL. Adunque la piramide a base triangolare EAGH è uguale e simile all'altra anche a base triangolare KHLD.*

Or essendosi dimostrata la KH parallela alla BA, è chiaro che il triangolo KDH sia equiangolo, e perciò simile all'altro BDA*: e similmente si rileva, che il triangolo DKL sia simile a DBC, ed il triangolo DHL all'altro DAC. Ma è poi il triangolo BAC simile al-

* 2. VI.
* 34. I.
* 10. XI.
* B. XI.
* 29. I.

l'altro EAG, e questo si è dimostrato simile al triangolo KGL; laonde sarà il triangolo BAC anche simile
21. VI. al triangolo KHL : quindi la piramide BACD è simile
d.11.XI all'altra HKLD. Per lo che essendosi dimostrata questa piramide HKLD simile all'altra AEGH; dovrà anche la piramide AEGH esser simile alla piramide ABCD : laonde ciascuna delle due piramidi AEGH, HKLD sarà simile all'intera piramide ABCD. E poichè BF è uguale ad FC, sarà il parallelogrammo
41. I. EBFG doppio del triangolo GFC: quindi il prisma contenuto da' due triangoli BKF, EHG, e da' tre parallelogrammi EBFG, EBKH, KHGF, sarà uguale all'altro che si contiene da' due triangoli GFC, HKL, e da' tre parallelogrammi KFCL, LCGH, HKFG; poichè se si prende per base del primo prisma il parallelogrammo EBFG, e per base dell'altro il triangolo GFC, il primo di essi prismi avrà per base un parallelogrammo doppio del triangolo ch'è base del-
40.XI. l'altro, e sono di più ugualmente alti, perchè contenuti tra i piani paralleli ABC, HKL. È poi manifesto, che ciascuno di questi due prismi BKFEHG, e GFCHKL sia maggiore di ciascuna delle piramidi AEGH, HKLD; poichè se si unisca la EF si vede, che il prisma BKFEHG è maggiore della piramide EBFK: ma questa piramide è uguale all'altra AEGH; poichè
B. XI. sono contenute da piani uguali e simili; perciò anche il prisma BKFEHG è maggiore della piramide AEGH. E l'altro prisma GFCHKL, perchè uguale al prisma KBFHEG, è anche maggiore della piramide HKLD, ch'è uguale all'altra AEGH. Adunque i due prismi de' quali si è detto sono maggiori di queste due piramidi. Laonde l'intera piramide ABCD a base triangolare si è divisa in due piramidi uguali e simili tra loro, e simili all'intera; ed in due prismi uguali, che sono maggiori della metà della piramide intera. C. B. D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se sieno due piramidi ugualmente alte, che abbiano le basi triangolari, e l'una e l'altra di loro si divida in due piramidi uguali e simili a tutta, ed in due prismi uguali; e delle piramidi ottenute, l'una e l'altra si divida nel modo stesso, e ciò si faccia sempre: starà la base dell'una piramide alla base dell'altra, come tutt'i prismi che sono nell'una a tutt'i prismi che sono nell'altra, uguali di numero. V. N.

Sia la piramide triangolare ABCD, ed essa si divida fig. 44. in due piramidi uguali tra loro e simili a tutta, ed in due prismi uguali; poi si divida ciascuna delle piramidi che si ottengono da questa divisione nel modo stesso, e così si faccia sempre; e la medesima divisione si pratichi anche nell'altra piramide MNOX di uguale altezza alla prima: dico che come la base ABC alla base MNO, così stiano tutt'i prismi che si contengono nella piramide ABCD a tutti gli altri, uguali di numero, che si contengono nella piramide MNOX.

Si faccia per ciascuna delle piramidi ABCD, MNOX la stessa costruzione che nella precedente Proposizione. E poichè BF è uguale ad FC, ed AG a GC, sarà FG parallela a BA*; e perciò il triangolo BCA è simile al triangolo FCG: e così pure si dimostrerà essere il triangolo NOM simile all'altro QOR. Or poichè BC è doppia di CF, ed NO si OQ, sarà BC a CF, come NO ad OQ; ed essendosi descritti dalla prima e seconda di queste linee rette i due rettilinei simili e similmente posti BCA ed FCG, e dalle due NO ed

* 2. VI.

OQ gli altri rettilinei simili e similmente posti NOM, OQR; dovrà stare il triangolo BCA al triangolo FCG, come il triangolo NOM all' altro QOR* ; e permutando starà il triangolo BCA al triangolo NOM, come il triangolo FCG al triangolo QOR*. Or poichè i piani ABC, HKL sono paralleli*, come anche gli altri MNO, STY ; le perpendicolari che da' punti D, X si abbassano su i piani ABC, MNO, le quali sono tra loro uguali, dovranno restar divise per metà dagli altri piani HKL, STY ; perciocchè anche le altre linee rette DC, XO son divise per metà da' piani stessi ne' punti L, Y*. Laonde i due prismi GFCHKL, RQOSTY saranno ugualmente alti ; e quindi starà il prisma FGCKHL al prisma QROTSY, come la base FCG alla base QOR*, cioè come il triangolo BCA all' altro NOM. E poichè i due prismi ch' esistono nella piramide BCAD sono tra loro uguali, come anche tra loro uguali sono gli altri due che contengonsi nella piramide MNOX* ; sarà perciò la somma de' primi due prismi a quella de' due altri, come un di quelli FGCKHL ad un di questi QORTYS*, cioè, secondo si è dimostrato, come BCA ad NOM. Similmente si dimostra che, divise le piramidi KHLD, TSYX nel modo stesso che le proposte, stia la somma de' due prismi contenuti nella prima di queste piramidi alla somma degli altri due che contengonsi nella seconda, come la base HKL alla base STY, e quindi come FGC a QOR ; o finalmente come BAC ad NMO. Adunque come BAC ad NMO, così starà la somma de' due prismi compresi nella piramide BCAD, e degli altri due compresi nella piramide KHLD alla somma de' quattro altri prismi due compresi nella piramide MNOX, e due altri nella TSYX. E continuando a dimostrare lo stesso per gli prismi che si ottengono dalla divisione delle piramidi EAGH, PMRS, e di tutte le altre che

* 22.VI.
* 16. V.
* 15.XI.
* 17. XI.
* 32. XI.
* 3. XII.
* 15. V.

risultano dividendo queste e le precedenti KHLD, TSYX continuamente, nel modo indicato nell' enunciazione; si concluderà in fine, che la somma di tutt' i prismi contenuti nella piramide BACD stia alla somma di tutti quelli che contengonsi nell'altra MNOX, e che sono in numero uguale a' primi, come la base dell' una piramide BAC alla base NMO dell' altra. C. B. D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Le piramidi triangolari che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi.

Sieno le piramidi triangolari ugualmente alte ABCD, MNOX; dico che stia la base ABC alla base MNO, come la piramide ABCD alla piramide MNOX. fig. 44.

Poichè se non è così, starà il triangolo ABC al triangolo MNO, come la piramide BACD ad un solido minore della piramide MNOX, o pur maggiore. Sia primieramente ad un solido minore V; e dividasi la piramide MNOX in due piramidi uguali tra loro, e simili all' intera, ed in due prismi uguali, i quali nella somma sono maggiori della metà della piramide*; indi si dividano similmente le piramidi che ottengonsi da una tal divisione, e così si continui a fare, finchè restino alcune piramidi nella piramide MNOX, le quali sieno minori dell' eccesso della piramide MNOX sul solido V*. Dinotino, per esempio, un tal residuo le piramidi PMRS, TSYX; che perciò i prismi che in tal modo resteranno assegnati nella piramide MNOX dovranno esser maggiori del solido V. Ciò fatto si divida similmente la piramide BACD, ed in tante parti,

* 3. XII.

* l. pr. 28. XII.

in quante si è divisa la piramide MNOX; sarà come la base ABC alla base MNO, così la somma de' prismi contenuti nella piramide BACD alla somma di quelli
* 4. XII. altri che contengonsi nella piramide MNOX*. Ma come la base ABC alla base MNO, così sta pure la piramide ABCD al solido V. Adunque la piramide ABCD starà al solido V, come tutt'i prismi contenuti nella piramide ABCD a tutti quelli che contengonsi nella piramide MNOX; e quindi essendo la piramide ABCD maggiore de' prismi in essa contenuti, sarebbe anche il solido V maggiore di quelli che si contengono nella
* 14. V. piramide MNOX*. Ma ne' è minore; il che non può essere. Non può dunque stare la base ABC alla base MNO, come la piramide ABCD ad un solido minore della piramide MNOX. E similmente si dimostrerà, che non possa stare la base MNO alla base ABC, come la piramide MNOX ad un solido minore della piramide ABCD.

Dico ora, che nè pure possa la base BAC serbare alla base NMO la stessa ragione che la piramide ABCD ad un solido Z maggiore della piramide MNOX. Poichè si avrebbe in tal caso, invertendo, la base MNO all'altra ABC, come il solido Z alla piramide
* C. V. ABCD*; ma come il solido Z alla piramide ABCD, così deve stare la piramide MNOX ad un solido minore della piramide ABCD; poichè quel solido Z è
* 14. V. maggiore di questa piramide MNOX*. Adunque sarebbe come la base MNO alla base ABC, così la piramide MNOX ad un solido minore della piramide ABCD. Il che, come si è poc'anzi dimostrato, è assurdo. Laonde nè pur può stare la base ABC alla base MNO, come la piramide ABCD ad un solido Z maggiore della piramide MNOX. Si è poi dimostrato che non poteva quella piramide serbar tal ragione ad un solido

minore di questa. Adunque dovrà stare la base ABC alla base MNO, come la piramide ABCD all'altra MNOX.

E quindi le piramidi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Le piramidi che hanno la medesima altezza, e le basi poligone, sono fra loro come le basi.

Sieno le piramidi a basi poligone ABCDEM, ed FGHKLN, le quali abbiano la stess' altezza: dico che come la base ABCDE alla base FGHKL, così stia la piramide ABCDEM all' altra FGHKLN. fig. 45.

Dividasi la base ABCDE ne' triangoli ABC, ACD, ADE, e la base FGHKL ne' triangoli FGH, FHK, FKL, e s' intendano questi triangoli esser le basi di altrettante piramidi ugualmente alte che le proposte, delle quali le prime abbiano per vertice il punto M, e le altre il punto N. E poichè sta il triangolo ABC al triangolo FGH, come la piramide ABCM alla piramide FGHN*; e che come il triangolo ACD allo stesso triangolo FGH, così sta la piramide ACDM alla piramide FGHN; sarà il trapezio ABCD al triangolo FGH, come la piramide ABCDM all'altra FGHN*. Ma è di nuovo come il triangolo ADE al triangolo FGH, così la piramide ADEM alla stessa FGHN; quindi starà il poligono ABCDE al triangolo FGH, come la piramide ABCDEM alla piramide FGHN. Similmente, paragonando i triangoli FLK, FKH, ed FGH con questo stesso triangolo FGH, e le piramidi FLKN, FKHN, FHGN con quest' ultima piramide FGHN, si dimostrerà essere la base FGHKL alla base FGH,

* 5. XII.
* 24. V.

come la piramide FGHKLN alla piramide FGHN; ed invertendo la base FGH alla base FGHKL, come la piramide FGHN alla piramide FGHKLN. Laonde essendo la base ABCDE alla base FGH, come la piramide ABCDEM alla piramide FGHN, e la base FGH alla base FGHKL, come la piramide FGHN all' altra FGHKLN; sarà, per equalità, la base ABCDE alla base FGHKL, come la piramide ABCDEM all' altra FGHKLN*.

* 22. V.

E perciò le piramidi ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Ogni prisma triangolare si divide in tre piramidi uguali tra loro, che hanno le basi triangolari.

fig. 46. Sia il prisma che ha per base il triangolo ABC, e per piano opposto a questa l' altro triangolo DEF: dico che il prisma ABCDEF si divide in tre piramidi triangolari tra loro uguali.

Si tirino le diagonali CE, CD, DB. E poichè la diagonale DB divide il parallelogrammo ADEB ne' due triangoli uguali ABD, EDB; perciò le due piramidi ABDC, EDBC, che hanno respettivamente per basi que' triangoli, e 'l vertice comune in C, saranno tra loro uguali*. Ma la piramide che ha per base il triangolo EDB, e per vertice il punto C, è la stessa che l' altra la cui base è il triangolo EBC, ed il punto D il vertice; poichè l' una e l' altra è contenuta dagli stessi triangoli. Adunque anche la piramide che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C è uguale a quell' altra, che ha per base il triangolo EBC, e per vertice il punto D. Similmente poichè il paral-

* 5. XII.

lelogrammo FCBE e diviso dalla diagonale CE, il triangolo ECF è uguale al triangolo ECB; e quindi la piramide che ha per base il triangolo ECF, e per vertice il punto D è uguale alla piramide la cui base è il triangolo ECB, e lo stesso punto D il vertice. Ma questa piramide si è dimostrata uguale a quell' altra che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C; adunque anche la piramide che ha per base il triangolo ECF, e per vertice il punto D è uguale a quella che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C. Quindi il prisma ABCDEF si divide in tre piramidi uguali, le quali hanno per basi de' triangoli, cioè nelle ABDC, EBDC, ECFD.

E poichè la piramide che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C, è la stessa che la piramide che ha per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D; poichè sono contenute dagli stessi piani: e che la piramide che ha per base il triangolo ABD, e per vertice il punto C si è dimostrata esser la terza parte del prisma la cui base è il triangolo ABC, ed il piano opposto è DEF; perciò anche la piramide che ha per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D, è la terza parte di un tal prisma. V. N.

Cor. 1. È chiaro da ciò che ogni piramide sia la terza parte del prisma che ha la medesima base, e l'altezza stessa. Poichè se la base comune a questi due solidi sia un' altra qualsivoglia figura rettilinea; potendosi il prisma, e la piramide concepir divisi respettivamente in tanti prismi, e piramidi, che abbiano per basi de' triangoli, quanti di questi si possono assegnare in quella figura rettilinea: e ciascuno di questi prismi essendo triplo della piramide corrispondente; sarà la somma di essi, cioè il prisma proposto, anche triplo della somma delle piramidi, cioè della piramide che ha la medesima base, e l'altezza stessa di un tal prisma.

V. N. *Cor.* 2. Di più i prismi ugualmente alti sono tra loro come le basi; poichè le piramidi che hanno le stesse loro basi, e la medesima altezza sono tra loro come le basi*.

* 6. XII.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Le piramidi simili che hanno le basi triangolari, sono tra loro in triplicata ragione de' lati omologhi.

fig. 47. Siено le piramidi simili e similmente poste ABCG, DEFH, le quali abbiano per basi i triangoli BCA, EFD, e per vertici i punti G, H: dico che la piramide ABCG stia alla piramide DEFH in ragion triplicata di quella, che il lato BC ha all' omologo EF.

Imperocchè si compiano i parallelogrammi ABCM, GBCN, ABGK; ed indi poi il parallelepipedo BGML, ch' è contenuto da questi piani, e dagli opposti ad essi. Similmente si compisca il parallelepipedo OPHE contenuto da' parallelogrammi DEFP, HEFR, DEHX, e dagli opposti a questi. E poichè le piramidi ABCG, DEFH sono simili, dovrà essere l' angolo piano ABC intorno all' angolo solido in B della piramide ABCG, uguale all' angolo piano corrispondente DEF intorno all' angolo solido in E, che supponesi nella piramide DEFH uguale al poc'anzi detto in B della prima*; e dovrà inoltre essere AB a BC, come DE ad EF*: laonde il triangolo ABC sarà simile all'altro DEF. Ma gli altri triangoli AMC, DPF sono simili ed uguali a' già detti respettivamente; onde i due parallelogrammi BM, EP dovranno esser simili. E così pure si dimostrerà, che il parallelogrammo BN sia simile all' altro ER, e BK ad EX. Ma i tre parallelogrammi BM, BN, BK sono respettivamente uguali e simili agli opposti*; ed

* d. 10. XI.

* 24. XI.

i tre altri EP, ER, EX sono auche simili ed uguali a' loro opposti; quindi i due parallelepipedi BL, EO, essendo terminati dallo stesso numero di piani simili, ed avendo perciò uguali i loro angoli solidi, saranno simili tra loro*. Per lo che essendo i parallelepipedi simili in triplicata ragione de' loro lati omologhi*; i solidi BL, EO saranno in triplicata ragione di quella che il lato BC serba all' omologo EF. Or come il solido BL al solido EO, così sta la piramide ABCG all' altra DEFH*, essendo queste piramidi le seste parti di que' solidi; mentre i prismi che sono le metà di essi*, sono tripli delle corrispondenti piramidi*. Adunque sarà pure la piramide ABCG all' altra DEFH in triplicata ragione di BC ad EF.

*d. 10. XI.
* 33. XI.
* 15. V.
* 28. XI.
* 7. XII.

Cor. Da ciò si può rilevare facilmente, che: *Le piramidi simili che hanno per basi de' rettilinei, sono tra loro in triplicata ragione di quella de' lati omologhi.*

V. N.

Imperocchè sieno ABCDEM, FGHKLN le piramidi simili e similmente poste, le quali hanno per basi i rettilinei ABCDE, FGHKL. Si dividano que' rettilinei ne' triangoli ABC, ACD, ADE; FGH, FHK, FKL, i quali saranno simili tra loro, ciascuno a ciascuno*. E poichè le piramidi proposte sono simili, sarà il triangolo ABM simile al triangolo FGN, ed il triangolo BCM simile a GHN; quindi sta MA ad AB, come NF ad FG; ed è inoltre come AB ad AC, così FG ad FH, per esser simili i triangoli ABC, FGH; quindi, per equalità, come MA ad AC, così sta NF ad FH. Similmente si dimostrerà che AC stia a CM, come FH ad HN; laonde sarà di nuovo, per equalità, come AM ad MC, così FN ad NH: perciò i triangoli AMC, FNH, avendo proporzionali i lati, saranno simili*. Per lo che le piramidi triangolari ABCM, FGHN essendo contenute da piani simili ed uguali in numero, ed avendo uguali i loro angoli solidi*, saran-

fig. 45.
* 20. VI.
* 5. VI.
* *A*. XI.

* d. 10. XI no simili tra loro*. E nel modo stesso si dimostrerà che la piramide ACDM sia simile alla piramide FHKN, e la piramide ADEM all' altra FKLN. Or essendo simili le piramidi triangolari ABCM, FGHN, sarà l' una all' altra in triplicata ragione del lato AC all' omologo FH; e per la stessa ragione la piramide ACDM sta alla piramide FHKN in triplicata ragione di AC ad FH; quindi come sta la piramide ACDM alla piramide FHKN, così starà la piramide ABCM all' altra FGHN. E similmente si dimostra, che come la piramide ADEM alla piramide FKLN, così stia la piramide ACDM all' altra FHKN. Laonde dovendo stare un antecedente ad un conseguente, come tutti gli an-
* 12. V. tecedenti a tutti i conseguenti*; sarà la piramide ABCM alla piramide FGHN, come tutta la piramide ABCDEM a tutta l' altra FGHKLN. Ma la piramide ABCM sta alla piramide FGHN in triplicata ragione del lato AB all' omologo FG; perciò anche tutta la piramide ABCDEM starà a tutta l'altra piramide FGHKLN in triplicata ragione del lato AB all' omologo FG. C. B. D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Le basi triangolari delle piramidi uguali sono reciprocamente proporzionali alle altezze: e quelle piramidi, che hanno le basi triangolari reciprocamente proporzionali alle altezze, sono uguali fra loro.

fig. 48. Sieno le piramidi uguali che abbiano le basi triangolari ABC, DEF, e per vertici i punti G, H: dico che le basi e le altezze di queste piramidi ABCG, DEFH sieno reciprocamente proporzionali, cioè che come la base ABC alla base DEF, così stia l' altezza

della piramide DEFH a quella della piramide ABCG.

Imperocchè si compiano i parallelogrammi AC, AG, GC, come anche gli altri DF, DH, HF; ed indi si compiano anche i parallelepipedi BGML, EHPO, i quali sono compresi rispettivamente da que' piani, e dagli opposti ad essi. E poichè le piramidi ABCG DEFH sono uguali; e che della piramide ABCG n'è sestuplo il parallelepipedo BL, e dell'altra DEFH n'è anche sestuplo l'altro parallelepipedo EO: perciò questi parallelepipedi BL, EO saranno uguali; e quindi le loro basi BM ed EP si reciprocheranno con le altezze*. Ma come la base BM alla base EP, così sta il triangolo ABC all'altro DEF*; adunque starà il triangolo ABC al triangolo DEF, come l'altezza del solido EO a quella del solido BL. Laonde poichè l'altezza del solido BL è la stessa di quella della piramide ABCG, e l'altezza del solido EO è anche la stessa di quella dell'altra piramide DEFH; ne segue, che starà pure la base ABC alla base DEF, come l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG. E perciò le basi, e le altezze delle piramidi uguali ABCG, DEFH sono reciprocamente proporzionali.

*34. XI.
* 15. V.

Che se le basi delle piramidi ABCG, DEFH si reciprochino con le altezze di esse, cioè che stia la base ABC alla base DEF, come l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG: dico che la piramide ABCG sia uguale all'altra DEFH.

Imperocchè fatta la medesima construzione: poichè sta la base ABC alla base DEF, come l'altezza della piramide DEFH a quella della piramide ABCG; ed è poi la base ABC alla base DEF, come il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP*; sarà perciò il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP, come l'altezza delle piramide DEFH, o ch'è lo stesso quella del parallelepipedo EO, all'altezza della piramide

* 15. V.

ABCG, cioè del parallelepipedo BL. Quindi questi parallelepipedi saranno tra loro uguali; poichè hanno le
34.XI basi reciprocamente proporzionali alle altezze: laonde anche uguali dovranno essere le piramidi ABCG, DEFH, che sono le seste parti di tali parallelepipedi. È perciò le basi triangolari ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Ogni cono è la terza parte del cilindro, che ha la medesima base e uguale altezza.

fig. 49. Abbia il cono la medesima base che il cilindro, cioè il cerchio ABCD, e l'altezza uguale: dico il cono essere la terza parte del cilindro, cioè il cilindro essere triplo del cono.

Perciocchè, se il cilidro non è triplo del cono, o sarà maggiore del triplo, o minore. Sia prima maggiore del triplo, e descrivasi nel cerchio ABCD il quadrato ABCD; adunque il quadrato è maggiore della metà del cerchio (*); e sul quadrato ABCD ergasi un prisma così alto come il cilindro, il qual prisma sarà maggiore della metà del cilindro, perchè se dintorno al cerchio ABCD si descriva un quadrato, sarà il quadrato descritto di dentro, la metà di questo, che è descritto dintorno, e sono eretti su queste medesime basi i solidi parallelepipedi ugualmente alti, cioè essi prismi; onde tali pri-
32.XI. smi, sono fra loro come le basi: il prisma adunque eretto sul quadrato ABCD è la metà del prisma eretto sul quadrato, che si descrive dintorno al cerchio ABCD; ed è il cilindro minore del prisma eretto sul quadrato, che si descrive dintorno al cer-

(*) Veg. la dim. della Prop. 2. del Lib. XII.

chio ABCD; il prisma dunque eretto sul quadrato ABCD, così alto come il cilindro, è maggiore della metà del cilindro. Seghinsi le circonferenze AB, BC, CD, DA per mezzo ne' punti E, F, G, H, e giungansi le AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; adunque ciascun triangolo AEB, BFC, CGD, DHA è maggiore della metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale consiste, come si è dimostrato di sopra (*): Ergansi da ciascun triangolo AEB, BFC, CGD, DHA i prismi alti come il cilindro, onde eziandio ciascuno di tali prismi è maggiore della metà della porzione del cilindro, che è dintorno ad esso, perchè se si tirino per i punti E, F, G, H le parallele alle AB, BC, CD, DA, e compiscansi in esse AB, BC, CD, DA i parallelogrammi, da' quali si ergano solidi parallelepipedi così alti come il cilindro, saranno i prismi, che sono ne' triangoli AEB, BFC, CGD, DHA, la metà di ciascuno de' solidi eretti: e sono le porzioni del cilindro minori de' solidi parallelepipedi eretti; adunque ancora i prismi, che sono ne' triangolo AEB, BFC, CGD, DHA, sono maggiori della metà delle porzioni del cilindro, che sono in esse: laonde segando per mezzo le altre circonferenze, e giungendo con linee rette, e da ciascun triangolo drizzando prismi così alti come il cilindro, e questo facendo sempre, alla fine lasceremo alcune porzioni del cilindro minori dell' eccesso nel quale il cilindro avanza il triplo del cono*: lascinsi, e siano AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; adunque il rimanente prisma la cui base è il poligono AEBFCGDH, e l'altezza la medesima del cilindro, è maggiore del triplo del cono; ma il prisma la cui base è il poligono AEBFCGDH, e la medesima altezza del cilindro è triplo della piramide la cui base è il poligono AEBFCGDH, e 'l ver-

* l. p. 28. XII.

(*) Dim. Prop. 2. Lib. XII.

c. 1. 7. XII. tice il medesimo punto, che del cono: la piramide dunque la cui base è il poligono AEBFCGDH, e 'l vertice il medesimo punto, che del cono, è maggiore del cono, che ha per base il cerchio ABCD: ma è minore, essendo compresa da esso; che è impossibile: onde non sarà il cilindro maggiore, che il triplo del cono. Dico oltre a ciò nè anche essere minore, che il triplo del cono: perciocchè, se egli è possibile, sia il cilindro minore, che il triplo del cono, sarà, invertendo, il cono maggiore, che la terza parte del cilindro: descrivasi nel cerchio ABCD il quadrato ABCD; adunque il quadrato è maggiore, che la metà del cerchio, e sul quadrato ABCD ergasi una piramide, che abbia il medesimo vertice, che il cono; la piramide dunque eretta sarà maggiore, che la metà del cono; perciocchè come abbiamo dimostrato, se dentro al cerchio si descriva un quadrato, sarà il quadrato ABCD la metà di quello, che è descritto dintorno al cerchio; e se da tali quadrati si ergano solidi parallelepipedi così alti, come il cono, i quali si chiamano anche prismi, sarà quello, che si erge dal quadrato ABCD la metà di quello che è eretto sul quadrato descritto dintorno al cerchio, *32. XI. perchè sono fra loro come le basi*; onde eziandio le *15. V. terze parti di essi*: la piramide dunque, la cui base è il quadrato ABCD, è la metà di questa piramide, che si erge dal quadrato descritto dintorno al cerchio. Ma la piramide eretta sul quadrato descritto dintorno al cerchio è maggiore del cono, perchè lo comprende; adunque la piramide, la cui base è il quadrato ABCD, e 'l medesimo vertice, che del cono, è maggiore della metà del cono. Seghinsi le circonferenze AB, BC, CD, DA per mezzo ne' punti E, F, G, H, e giungansi le AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Adunque ciascuno de' triangoli AEB, BFC, CGD, DHA è

maggiore, che la metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale consiste. Ergansi da ciascun triangolo AEB, BFC, CGD, DHA le piramidi, che abbiano i medesimi vertici, che il cono; ciascuna dunque delle piramidi erette al medesimo modo è maggiore, che la metà della porzione del cono, che è dintorno ad essa: laonde segando per mezzo l'altre circonferenze, e giungendo le linee rette, e da ciascun triangolo ergendo la piramide, che abbia il medesimo vertice, che il cono, e questo facendo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni del cono, che saranno maggiori dell' eccesso, nel quale il cono avanza la terza parte della cilindro. Lascinsi, e siano quelle che sono nelle AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; adunque la rimanente piramide, la cui base è il poligono AEBFCGDH, e 'l vertice il medesimo, che del cono, è maggiore della terza parte del cilindro: ma la piramide la cui base è il poligono AEBFCGDH, e 'l vertice medesimo, che del cono, è la terza parte del prisma la cui base è il poligono AEBFCGDH, e la medesima altezza, che del cilindro*; onde il prisma la cui base è il poligono AEBFCGDH, e la medesima altezza, che del cilindro, è maggiore del cilindro la cui base è il cerchio ABCD; ma è minore, perciocchè da esso è compreso; che non è possibile. Non è dunque il cilindro minore, che il triplo del cono: e si è dimostrato non esser maggiore, che il triplo; onde è necessario, che il cilindro sia triplo del cono; e però il cono è la terza parte del cilindro.

*c. 1. 7. XII.

Adunque ogni cono ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

V. N. *I coni, e cilindri, che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi*

fig. 50. Siano i coni, e cilindri della medesima altezza, che abbiano per basi i cerchi ABCD, EFGH, e gli assi KL, MN, ed i diametri delle basi AC, EG: dico come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così essere il cono AL al cono EN.

Se non è così, sarà come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL a qualche solido o maggiore, o minore del cono EN: sia prima ad un minore, che sia X, e l'eccesso del cono EN sopra il solido X sia il solido Z; adunque il cono EN è uguale a' solidi X, Z. Descrivasi nel cerchio EFGH il quadrato EFGH; laonde un tal quadrato è maggiore che la metà del cerchio. Ergasi dal quadrato EFGH una piramide così alta, come il cono; la piramide dunque eretta è maggiore, che la metà del cono; perchè, se descriviamo un quadrato dintorno al cerchio, e da esso ergiamo una piramide alta come il cono, sarà la piramide descritta di dentro la metà della piramide descritta dintorno; perciocchè sono fra loro come le basi*. Ma il cono è minore della piramide, che è descritta dintorno; adunque la piramide la cui base è il quadrato EFGH, e 'l vertice il medesimo, che del cono, è maggiore della metà del cono. Seghinsi le circonferenze EF, FG, GH, HE per mezzo ne' punti O, P, R, S, e giungansi le EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE, ciascun triangolo dunque EOF, FPG, GRH, HSE è maggiore, che la metà della por-

* 6. XII.

zione del cerchio nella quale consiste; ergasi da ciascuno di questi triangoli una piramide alta come il cono; adunque ciascuna delle piramidi erette, è maggiore della porzione del cono, che è in essa; laonde segando le altre circonferenze per mezzo, e giungendo con linee rette, ed ergendo su ciascun triangolo piramidi alte come il cono, e questo facendo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni del cono, che saranno minori del solido Z*. Lascinsi, e siano quelle, che sono in esse EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE; adunque la rimanente piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e la medesima altezza, che del cono, è maggiore del solido X. Descrivasi nel cerchio ABCD il poligono ATBYCVDQ simile, e similmente posto al poligono EOFPGRHS, e da esso ergasi una piramide alta come il cono AL: perchè dunque è come il quadrato della AC al quadrato della EG, così il poligono ATBYCVDQ al poligono EOFPGRHS*, e come il quadrato della AC al quadrato della EG, così il cerchio ABCD al cerchio EFGH*; sarà come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il poligono ATBYCVDQ al poligono EOFPGRHS*; ma come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL al solido X, e come il poligono ATBYCVDQ al poligono EOFPGRHS, così la piramide la cui base è il primo di que' poligoni e 'l vertice il punto L, alla piramide la cui base è l'altro di essi poligoni, e il vertice il pnnto N; come dunque il cono AL al solido X, così la piramide la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L, alla piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N. Ma il cono AL è maggiore

*l.p.28. XI.

*1. XII.

*2. XII.

*11. V.

della piramide, che è in esso; adunque il solido X è
* 14. X. maggiore della piramide, che è nel cono EN*.
Ma n'è minore; il che è assurdo. Non è dunque come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL ad un solido minore del cono EN: similmente si dimostrerà nè anche come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così essere il cono EN a qualche solido minore del cono AL. Dico oltre a ciò non essere come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL a qualche solido maggiore del cono EN: perciocchè, se egli è possibile, sia ad un solido maggiore, che sia I; invertendo dunque, come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così sarà il solido I al cono AL. Ma come il solido I al cono AL, così sta il cono EN a qualche
* 14. V. solido minore del cono AL*; come dunque il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così il cono EN a qualche solido minore del cono AL; che si è dimostrato impossibile: onde non è come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL a qualche solido maggiore del cono EN; e si è dimostrato non essere anche a un minore; adunque come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così è il cono AL al cono EN. Ma come il cono al cono, co-
* 15. V. sì è il cilindro al cilindro*, perciocchè l'uno è triplo
* 10. XII. dell'altro*; come dunque il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così i cilindri, che sono in essi ugualmente alti a' coni.

Adunque i coni e cilindri ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

I coni, e cilindri simili sono fra loro in triplicata ragione di quella, che hanno i diametri delle basi.

Sieno i coni, e cilindri simili, le cui basi sieno i cerchi ABCD, EFGH, ed i diametri delle basi AC, EG, e gli assi de' coni, o cilindri KL, MN: dico il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto L, al cono, la cui base è il cerchio EFGH, e 'l vertice il punto N, avere ragione triplicata di quella, che ha AC ad EG. Perciocchè se il cono ABCDL al cono EFGHN non ha ragione triplicata di quella, che ha AC ad EG, avrà il cono ABCDL a qualche solido minore, ovvero ad un maggiore del cono EFGHN ragione triplicata di AC ad EG: l' abbia prima ad un minore, che sia X. Facciasi la stessa costruzione, che nella precedente proposizione, e si dimostrerà similmente, che la piramide che ha per base il poligono EOFPGRHS, e per vertice il punto N, sia maggiore del solido X. Congiungansi le KQ, MS. E perchè il cono ABCDL è simile al cono EFGHN, dovrà stare AC ad EG, come l' asse KL all' asse MN*: ma AC sta ad EG, come AK ad EM*; Laonde starà AK ad EM, come KL ad MN; e per mutando AK a KL, come EM ad MN: ma gli angoli AKL, EMN sono uguali, perchè retti; adunque i triangoli AKL, EMN che hanno i lati proporzionali intorno agli angoli uguali, saranno simili*. E perchè AK sta a KQ, come EM ad MS, e che queste rette comprendono gli angoli uguali AKQ, EMS, conciossiachè qual parte è l' angolo AKQ di quattro retti che sono al centro K, tal sia l'angolo EMS di quat-

fig. 51.

* d. 23 XI.
* 15. V.
* 6. V.

tro retti che sono al centro M; sarà il triangolo AKQ
* 6. VI. simile al triangolo EMS*. Inoltre poichè sta AK a KL, come EM ad MN, e che AK è uguale a KQ, EM ad MS, sarà QK a KL, come SM ad MN; ma gli angoli QKL, SMN sono uguali, perchè retti: onde il triangolo LKQ è simile al triangolo NMS. Di più essendo, per la similitudine dei triangoli AKL, EMN, LA ad AK, come NE ad EM; e per la similitudine dei triangoli AKQ, EMS essendo pure KA ad AQ, come ME ad ES; sarà, per equalità, LA ad AQ, come NE ad
* 22. V. ES* Or perchè sono simili i triangoli LQR, NSM, sta LQ a QK, come NS ad SM; e per gli altri triangoli simili KAQ, MES sta KQ a QA, come MS ad SE; onde sarà, per equalità, QL a QA, come SN ad SE. Ma si è dimostrato essere QA ad AL, come SE ad EN: laonde di nuovo, per equalità, starà QL ad LA, come SN ad NE: ed i triangoli LQA, NSE avendo i lati
* 5. VI. proporzionali, sono equiangoli e simili*: onde la piramide che ha per base il triangolo AKQ, e per vertice il punto L, è simile alla piramide, che ha per base il triangolo EMS, e per vertice il punto N; mentre queste
* A. XI. hanno gli angoli solidi rispettivamente uguali*; e sono contenute dallo stesso numero di piani simili. Ma le piramidi simili, e che hanno le basi triangolari, sono
* 8. XII. in triplicata ragione di quella de' lati omologhi*; adunque la piramide AKQL sta alla piramide EMSN in triplicata ragione di quella, che ha AK ad EM. Similmente da' punti D, V, C, Y, B, T, a K, e da' punti H, R, G, P, F, O, ad M tirando linee rette, e da' triangoli drizzando le piramidi che abbiano gli stessi vertici, che il cono, dimostreremo ciascuna piramide del medesimo ordine a ciascuna dell'altro ordine avere triplicata ragione di quella, che ha il lato AK al lato omologo EM, cioè, che AC ad EG. Ma siccome uno degli antecedenti sta ad uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti a
* 12. V. tutti i conseguenti*; è dunque come la piramide AKQL

alla piramide EMSN, così tutta la piramide, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L, a tutta la piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N; onde la piramide, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L, alla piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N, ha ragion triplicata di quella, che ha AC ad EG; e si pone il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto L, al solido X avere ragion triplicata di quella, che ha AC ad EG; come dunque il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto L, al solido X, così è la piramide, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L, alla piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, è 'l vertice il punto N: ma detto cono è maggiore della piramide, che è in esso, perciocchè la comprende; adunque eziandio il solido X è maggiore della piramide, la cui base, è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N*: ma è minore; che è impossibile. Il cono dunque, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto L, a qualche solido minore del cono, la cui base è il cerchio EFGH, e 'l vertice il punto N, non ha ragion triplicata di quella, che ha AC ad EG. Similmente dimostreremo nè anche il cono EFGHN a qualche solido minore del cono ABCDL avere triplicata ragione di quella, che ha AC ad EG. Or dico che nè anche il cono ABCDL ad un solido maggiore del cono EFGHN possa avere ragione triplicata di quella, che ha AC ad EG. Perciocchè, se egli è possibile, l'abbia a qualche solido maggiore, che sia Z; invertendo dunque, il solido Z al cono ABCDL ha ragion triplicata di quella, che ha EG ad AC; ma come il solido Z al cono ABCDL, così sta il cono EFGHN a qualche solido minore del cono ABCDL*; adunque ancora il cono EFGHN ad un solido minore del cono ABCDL avrà ragione

* 14. V.

* 14. V.

triplicata di quella, che ha EG ad AC; che si è dimostrato impossibile. Adunque il cono ABCDL ad un solido maggiore del cono EFGHN non ha ragion triplicata di quella, che ha AC ad EG: e si è dimostrato nè anche ad un minore; onde il cono ABCDL al cono EFGHN ha ragion triplicata di quella, che ha AC ad EG. Ma come il cono al cono, così il cilindro al cilindro; perciocchè il cilindro, che consiste nella medesima base, che il cono, ed è ugualmente alto, è triplo del cono*; onde avrà pure il cilindro al cilindro ragion triplicata di quella, che ha AC ad EG. Laonde i coni, e cilindri simili, ec. C. B. D.

* 10. XII.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

F. N. *Se un cilindro sia segato da un piano parallelo a' piani opposti, starà come il cilindro al cilindro, così l' asse all' asse.*

fig. 52. Sia il cilindro AD segato dal piano GH parallelo a'piani opposti AB, CD, il quale incontri l'asse EF nel punto K; e sia la linea GH la comune sezione del piano GH e della superficie del cilindro AD: sia di più AEFC quel parallelogrammo rettangolo, che rivolgendosi intorno al lato EF descrive il cilindro AD*, e la linea retta GK sia la comune sezione del piano GH coll'altro AEFC. E poichè i piani paralleli AB, GH sono segati dal piano AEKG, le loro comuni sezioni AE, GK saranno parallele*: quindi AK è un parallelogrammo rettangolo, il quale perciò nel rivolgersi intorno ad EK descriverà un cilindro, ed il suo lato GK opposto ad AE descriverà un cerchio, il cui centro sarà il punto K; ed un tal cerchio essendo lo stesso che la sezio-

* d. 21. XI.
* 16. XI.

ne GH, è chiaro, che il piano GH divida il cilindro AD ne' due cilindri AH, GD, che sono quelli, che verrebbero descritti dalla rivoluzione de' parallelogrammi AK, GF intorno alle EK, KF. Or io dico che stia il cilindro AH al cilindro HC, come l'asse EK all'asse KF.

Si prolunghi l'asse FE dall'una e dall'altra parte, e poi si taglino quante si vogliano EN, NL uguali alla EK, e quante altre ne piaccia FX, XM uguali alla KF; e per gli punti L, N, X ed M si tirino i piani paralleli ad essi AB, CD: si dimostrerà come si è fatto del piano GH, che le comuni sezioni di que' piani e della superficie del cilindro prolungato, sieno cerchi, i quali hanno per centri i punti L, N, X ed M; e che tali piani tronchino i cilindri OS, RB, CY e TQ. Ciò premesso, i tre cilindri OS, RB ed AH, avendo uguali le altezze LN, NE ed EK, dovranno esser tra loro come le basi*: e perciò quelli *11.XII. saranno uguali al pari di queste: adunque il cilindro OH, e l'asse suo LK saranno ugualmente multiplici del cilindro AH, e del suo asse EK. E similmente si dimostrerà, che il cilindro GQ, e 'l suo asse KM sono ugualmente multiplici del cilindro GD, e del suo asse KF. Or è chiaro, che se l'asse LK del cilindro OH è maggiore dell'asse KM dell'altro cilindro GQ, anche quel cilindro è maggiore di questo; e che se l'asse LK fosse uguale, o minore dell'asse KM, anche il cilindro OH sarebbe uguale, o minore del cilindro GQ. Adunque sono quattro grandezze, cioè i due assi EK, KF, ed i due cilindri BG, GD: ed essendosi presi qualunque ugualmente multiplici dell'asse EK, e del cilindro BG, cioè l'asse KL, ed il cilindro OH; come pure dell'asse KF, e del cilindro GD essendosi presi qualunque altri ugualmente multiplici, cioè l'asse KM, ed il cilindro GQ; si è

dimostrato, che se l'asse KL è maggiore dell'asse KM, anche il cilindro PG è maggiore del cilindro GQ; e se uguale, uguale; se minore, minore: dovrà dunque stare l'asse EK all'asse KF, come il cilindro BG al cilindro GD*. *d.5.V.

E perciò se un cilindro ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

I coni, e cilindri, che hanno le basi uguali, sono tra loro come le altezze.

fig. 53. Sulle basi uguali AB, CD sienò posti i cilindri EB ed FD: dico che come il cilindro EB al cilindro FD, così stia l'asse GH all'asse KL.

Si prolunghi l'asse KL di uno di essi cilindri in N, e poi troncata la LN uguale alla HG, s'intenda intorno all'asse LN formato il cilindro CM. E poichè i cilindri EB, CM hanno la medesima altezza, saranno come le loro basi AB, CD*. Ma queste sono uguali: quindi anche uguali saranno i cilindri EB, CM. Or essendosi il cilindro FM segato con un piano CD parallelo a' suoi piani opposti; dovrà il cilindro CM serbare all'altro FD, la stessa ragione dell'asse NL all'asse LK*. Ma il cilindro CM è uguale al cilindro EB, e l'asse LN all'asse GH; quindi sarà il cilindro EB all'altro FD, come l'asse HG del primo all'asse LK dell'altro. E poichè come il cilindro EB all'altro FD, così sta il cono ABG al cono CDK, essendo i cilindri tripli de' coni*: sarà perciò come l'asse GH all'asse KL, così il cono ABG al cono CDK*.

*11.XII. *13.XII. 15.V. *c.10.XII.

Adunque i coni, e cilindri ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Le basi de' cilindri, e coni uguali sono reciprocamente proporzionali alle altezze: e que' coni, e cilindri, le cui basi sono reciprocamente proporzionali alle altezze, sono uguali fra loro. V. N.

I cerchi ABCD, EFGH descritti intorno a' diametri AC, EG sieno le basi di due cilindri, e di due coni uguali, e KL, MN i loro assi, che sono anche le loro altezze: dico che le basi e le altezze de' cilindri uguali AX, EO sieno reciprocamente proporzionali, cioè che stia la base ABCD alla base EFGH, come l'altezza MN all'altezza KL. fig. 54.

Imperciocchè l'altezza KL o è uguale all'altezza MN, o gli è disuguale. Gli sia primieramente uguale: e poichè il cilindro AX è uguale al cilindro EO, ed i cilindri ugualmente alti sono come le basi*; dovrà essere anche la base ABCD uguale alla base EFGH*. Laonde la base ABCD sta alla base EFGH, come l'altezza MN all'altezza KL. * 11.XII. * A. V.

Che se le altezze KL, ed MN non sieno uguali; ma sia MN la maggiore di esse: si tagli dalla MN, la PM uguale alla KL, e poi si seghi il cilindro EO col piano TYS tirato per P parallelo a' piani opposti de' cerchi EFGH, RO; sarà un cerchio la comune sezione di quel piano e del cilindro. Ed essendo il cilindro AX uguale all'altro EO, dovranno essi serbare al cilindro ES la stessa ragione*. Ma il cilindro AX sta al cilindro ES, come la base ABCD alla base EFGH; poichè hanno la stess' altezza*; ed il cilindro EO sta all'altro ES, come MN ad MP; poichè il cilindro EO * 7. V. * 13.XII.

è segato dal piano TYS parallelo a' piani opposti. Adunque starà la base ABCD alla base EFGH, come l'altezza MN all'altezza MP, o sia KL: cioè le basi de' cilindri uguali AX, EO si reciprocano con le altezze.

Sieno ora reciprocamente proporzionali le basi e le altezze de' cilindri AX, EO, cioè stia la base ABCD alla base EFGH, come l'altezza MN all'altezza KL: dico che il cilindro AX sia uguale al cilindro EO.

Imperocchè se sia la base ABCD uguale alla base EFGH, è chiaro, che dovrà essere anche l'altezza MN uguale all' altezza KL; e perciò il cilindro AX uguale al cilindro EO. Che se poi non sia la base ABCD uguale alla base EFGH; sia ABCD la maggiore. E poichè sta la base ABCD alla base EFGH, come l'altezza MN all' altezza KL, sarà anche MN maggiore di KL*. Laonde, fatta la stessa construzione della parte precedente; poichè come la base ABCD alla base EFGH, così sta l'altezza MN all' altezza KL, o MP, essendo KL uguale ad MP: ed è poi la base ABCD alla base EFGH, come il cilindro AX all'altro ES, poichè sono ugualmente alti*; ed inoltre sta l' altezza MN all'altezza MP, o KL, come il cilindro EO allo stesso ES; perciò starà il cilindro AX all'altro ES, come il cilindro EO allo stesso ES; e quindi il cilindro AX è uguale al cilindro EO*. E così pure si dimostrerà per gli coni C. B. D.

* A. V

* 11. XII.

* 9. V.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Dati due cerchi concentrici (*), *inscrivere nel maggiore di essi un poligono di lati uguali, ed in numero pari, il qual non tocchi il cerchio minore.*

V. N1

Sieno ABDC, *abd* i due cerchi proposti, i quali sieno descritti dintorno al comune centro O: bisogna inscrivere nel maggiore di essi ABDC un poligono di lati uguali ed in numero pari, il qual non tocchi il cerchio minore *abd*.

fig. 55.

Per lo centro comune O di quei cerchi si tiri la linea retta BD, e poi dal suo estremo D si tiri al cerchio *bad* la tangente D*a*A; indi si divida la semicirconferenza BAD per mezzo, la metà ancora per mezzo, e lo stesso facciasi sempre, alla fine lasceremo un arco minore dell' altro ACD*: suppongasi esser questo l' arco CD, e si giunga la linea retta CD; sarà questa il lato del poligono cercato.

* l.p.28. XI.

Imperocchè essendo l' arco DCA maggiore dell' arco CD, la corda DC di questo dovrà cadere al di là della corda AD di quello, per rispetto alla circonferenza *bad*; e quindi siccome la linea retta DA tocca il cerchio *bad*, così l' altra DC non dovrà nè meno toccarlo. E perciò se nel cerchio ABDC adatteransi successivamente linee rette uguali a questa DC, si verrà a descrivere in esso un poligono di lati uguali, ed in numero pari, che non toccherà il cerchio minore *abd*. C. B. F.

Scol. Che se fossero dati i due archi di cerchio DCE, *dae* descritti dintorno al comune centro O, e terminati in una delle parti da una stessa linea retta BOD condotta pel loro comune contro O; e si voles-

V. N4

(*) cioè, dintorno al medesimo centro.

se dividere l'esteriore di essi DCE in tal numero di parti uguali, sicchè alcuna delle linee rette tirate per due punti prossimi di tali divisioni non potesse incontrare l'altro arco *dae*. È chiaro che si otterrebbe ciò che si dimanda, tirando per un estremo D dell'arco esterno DE la tangente D*a*A all'altro arco *dae*, o al cerchio della cui circonferenza quest'arco è parte, e poi dividendo sempre per metà l'arco DE, finchè si pervenga ad un arco DC minore di DA.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

V. N. *Se la circonferenza di un semicerchio si divida continuamente per metà quante volte si voglia, e si congiungano i punti prossimi delle divisioni; e che poi fatta un' identica operazione in un altro semicerchio, s' intendano questi rivolgersi insieme co' rettilinei che contengono dintorno a' rispettivi diametri: i solidi che da queti rettilinei si descrivono saranno tra loro in triplicata ragione di quella de' diametri.*

fig. 56. Sieno BAC, EDF due semicerchi, e BC, EF, i loro diametri; e la circonferenza BAC dell'un di essi si divida continuamente per metà, e si congiungano i punti prossimi delle divisioni per mezzo delle BG, GH, HI, IA, ec; e lo stesso poi si pratichi nell'altro semicerchio, sicchè ne risulti in questo un semipoligono di ugual numero di lati al precedentemente descritto nel semicerchio BAC: dico che rivolgendosi i semicerchi BAC, EDF una co' semipoligoni BGHIAC, EKLMDF in essi compresi dintorno a' rispettivi diametri BC, EF, si genereranno da que' semipoligoni due solidi, i quali saranno l' uno all' altro in triplica-

ta ragione di quella del diametro BC all' altro EF.

Da' centri O, V de' cerchi a' punti G, K delle divisioni si tirino i raggi OG, VK; e da' punti G, K si tirino le perpendicolari GN, KP a' diametri CB, FE. E poichè quella parte ch' è l' angolo GOB di quattro retti dintorno al centro O, la stessa è l' angolo KVE de' medesimi quattro retti dintorno al centro V; perciò sarà l' angolo GOB uguale all' altro KVE; e quindi ciascuno degli angoli alla base del triangolo isoscele GOB sarà uguale a ciascun di quelli alla base dell' altro triangolo isoscele KVE*. Adunque sarà l' angolo GBN uguale all' altro KEP; ma è pure l' angolo retto BNG uguale all' altro EPK: quindi i triangoli BNG, EPK saranno simili; e perciò dal loro rivolgimento dintorno alle BN, EP si genereranno due coni simili*, e l' un di questi starà all' altro in triplicata ragione di GN a KP*, o di OG ad VK, o di OB ad VE. Or giungansi le OH, VL, si prolunghino le HG, LK sino a' diametri CB, FE in S, T, e da' punti H, L si tirino a' diametri suddetti le perpendicolari HQ, LR. Ed essendo l'angolo BOH uguale all' angolo EVL, perchè l' un di essi è doppio dell' angolo GOB, e l' altro di KVE, che poc' anzi si sono dimostrati uguali; ed è inoltre l' angolo OHG uguale all' angolo VLK, sarà il rimanente angolo OSH del triangolo OHS uguale al rimanente angolo VTL dell' altro triangolo VLT. Laonde i due triangoli HQS, LRT rettangoli in Q, R saranno simili; e perciò anche simili saranno i coni che essi generano rivolgendosi intorno a QS, RT; e l' un di questi starà all' altro in triplicata ragione di HQ ad LR*, o sia di HO ad VL, o di OB ad VE. Ma per esser simili tra loro i triangoli GNS, KPT, sta il cono generato dal primo nel rivolgersi dintorno ad NS a quello che genera il secon- rivolgendosi dintorno a PT, in triplicata ragione di GN

* 5. e 32. I.
* d. 24. XI.
* 12. XII.
* 12. XII.

a KP, o di OB ad VE. Adunque starà il cono descritto dal triangolo HQS a quello che descrive l'altro triangolo LRT, come il cono generato dal triangolo GNS al cono generato dal triangolo KPT; e permutando e dividendo starà il solido generato dal trapezio HQNG rivolgendosi dintorno al lato NQ al solido generato dal simile trapezio LRPK rivolgendosi dintorno ad RP, come il cono generato da GNS a quello generato da KPT, e quindi in triplicata ragione di OB ad VE.

Similmente, tirate da'punti I, M su i diametri BC, EF le perpendicolari IX, MY, si dimostrerà che i solidi descritti dal rivolgimento de' trapezj IXQH, MYRL dintorno a' lati XQ, YR sieno tra loro in triplicata ragione di OB ad VE; e così inseguito. Adunque essendo le ragioni del cono descritto dal triangolo BNG al cono descritto dal triangolo EPK, e quelle de' solidi descritti da'corrispondenti trapezj HQNG, LRPK; IXQH, MYRL; IAOX, MDVY rispettivamente uguali alla triplicata ragione di OB ad VE; sarà anche il solido generato dall' intero semipoligono BGHIAC nel rivolgersi dintorno a BC a quello che si genera dall' altro semipoligono EKLMDF rivolgendosi dintorno alla EF, in triplicata ragione di OB ad VE*, o di CB ad FE.

* 12. V.

Che perciò, se la circonferenza ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Le sfere sono tra loro in triplicata ragione di quella de' diametri.

Sieno le sfere descritte dintorno a'diametri BC, EF, *fig.* 57. da' semicerchi BAC, EDF: dico che la sfera che ha per diametro BC stia a quella che ha EF per diametro in triplicata ragione di BC ad EF.

Se non è così; la sfera che ha per diametro BC ad una sfera minore di quella che ha EF per diametro, o ad una maggiore serberà triplicata ragione di BC ad EF; sia primieramente questa ragione triplicata uguale a quella della sfera che ha per diametro BC ad un' altra minore di quella del diametro EF, e quindi descritta da un semicerchio *edf* minore dell' altro EDF, e che suppongasi avere lo stesso centro di questo. Si divida continuamente per metà la semicirconfe- EDF, finchè si pervenga ad inscrivere nel semicerchio EDF la metà EHDIF di un poligono di un numero pari, di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore *edf** ; e poi si divida continuamente per metà l'altra semicirconferenza BAC tante volte, quante volte si è così divisa la semicirconferenza EDF: si verrà in tal modo ad inscrivere anche nel semicerchio ABC la metà BKALC di un poligono di un numero pari di lati uguali simile a quello di cui EHDIF era metà. Or se i due semipoligoni BKALC, EHDIF s'intendano rivolgersi insieme co'semicerchi ne'quali sono inscritti, e con l'altro *edf* intorno a'rispettivi diametri, si verranno da que' semipoligoni a descrivere due solidi inscritti nelle sfere,

*16.XII.

che si generano in tal rivolgimento da' semicerchi BAC, EDF; e di più è manifesto, che il solido descritto dal semipoligono EHDIF non possa toccare la sfera che si descrive dal semicerchio *edf*. Laonde dovendo stare il solido descritto dal semipoligono BKALC a quello che descrive l'altro EHDIF, in triplicata ragione di BC ad EF*; e questa ragione essendosi supposto uguale all' altra della sfera che ha per diametro BC a quella che ha per diametro *ef*; dovrà anche stare la sfera del diametro BC a quella del diametro *ef*, come il solido descritto dal semipoligono BKALC all' altro che si descrive dal semipoligono EHDIF. Quindi siccome la sfera del diametro BC è maggiore del solido descritto dal semipoligono BKALC, ch' è in essa; così dovrebbe anche la sfera del diametro *ef* esser maggiore del solido descritto dal semipoligono EHDIF*. Ma n'è minore, perchè questo la comprende: e ciò è impossibile. Non può dunque la triplicata ragione di BC ad EF essere uguale alla ragione della sfera del diametro BC ad un' altra sfera minore di quella, che ha EF per diametro. E similmente si dimostrerebbe, che la ragion triplicata di EF a BC non può pareggiar la ragione della sfera del diametro EF ad un altra sfera minore di quella, che ha BC per diametro.

* 17. XII.

* 14. V.

Dico inoltre, che non possa la ragion triplicata di BC ad EF essere uguale a quella della sfera del diametro BC ad una sfera maggiore di quella, che ha EF per diametro. Poichè s'è possibile sia questa nuova sfera quella, che si descrive dal semicerchio STV, maggiore dell' altro EDF: starà invertendo la sfera descritta dal semicerchio STV, cioè quella che ha per diametro SV, alla sfera che ha per diametro BC, in triplicata ragione di EF a BC. Ma la sfera, che ha per diametro SV sta a quella che ha per diametro BC, come la sfera il cui diametro è EF ad un' altra sfera

minore di quella del diametro BC* : Adunque dovrebbe * 14. V. la triplicata ragione di EF, a BC pareggiar la ragione della sfera del diametro EF ad una sfera minore di quella che ha BC per diametro: la qual cosa si è già dimostrata impossibile. Quindi nè anche può essere la triplicata ragione di BC ad EF uguale a quella della sfera, che ha per diametro BC ad un' altra sfera maggiore di quella che ha per diametro EF. Si è poi dimostrato, che una tal ragione triplicata nè pure poteva esser quanto quella della sfera del diametro BC ad una sfera minore dell' altra il cui diametro è EF. Adunque dovrà necessariamente essere la sfera del diametro BC a quella del diametro EF, in triplicata ragione di BC ad EF. C. B. D.

FINE DEL LIBRO XII.

IL PRIMO LIBRO

DI

ARCHIMEDE

SIRACUSANO

SULLA SFERA, E SUL CILINDRO,

NUOVAMENTE ESPOSTO,

PER SERVIR DI CONTINUAZIONE A' LIBRI XI. E XII. DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

SEGUITO DA UN BREVE TRATTATO

DELLA

MISURA DEL CERCHIO.

NAPOLI

Nella Stamperia della Reale Accademia di Marina.

1818.

PREFAZIONE.

Il primo de'due Libri di Archimede sulla Sfera, e sul Cilindro è, tra le non poche Opere geometriche originali di questo divino ingegno, il solo che possa presentarsi alla prima istruzione de' giovani, che intraprendono la carriera geometrica. Esso forma la continuazione de' Libri XI. e XII. degli Elementi di Euclide, o piuttosto è il complemento della teorica sul Cilindro e sulla Sfera, che questo Geometra aveva cominciata a trattare nel Libro XII., ordinando e dimostrando alla sua maniera alcune importanti verità, che riguardano il rapporto di tali solidi, e che erano state scoperte da Eudosso, come si rileva dalla lettera di Archimede a Dositeo, premessa al primo libro sulla Sfera e sul Cilindro, la quale è stata restituita alla sua integrità, con alcuni manoscritti, dal Professore di Letteratura Greca Giacomo Moor, con l'assistenza del suo collega Roberto Simson. In un tal Libro Archimede intraprende ad assegnare la misura di questi solidi, sì per riguardo alla loro superficie, che per rispetto alla solidità loro; o che sieno interi, o pur tagliati con piani perpendicolari all' asse: finalmente assegna il rapporto della Sfera al Cilindro circoscritto, il qual rapporto ritrovò esser d'uguaglianza, tanto se si paragonano le superficie (quando nel Cilindro si comprendono le due basi) quanto se si paragonino i volumi, o solidità. Ed

ei restò sì pagó di una tale scoperta, che, anteponendola ad infinite altre importantissime da lui fatte, la volle per compagna fin nella tomba.

Queste verità Archimedee essendo state senza dubbio da lui rinvenute col metodo de' limiti, del quale ei fece tanto uso, e con tanto profitto, non potè egli poi dimostrarle ricalcando il cammino d' invenzione; poichè vi avrebbe in tal caso dovuto includere la considerazione metafisica dell' infinito, che agli accurati Geometri antichi dispiaceva non poco, come lontana dal vero rigore: che perciò dovè servirsi di ripieghi indiretti; e premettervi ancora non pochi lemmi. Or questi lemmi, e queste dimostrazioni di Archimede, sebbene sieno di molto pregio presso i Geometri, per gli molti tratti di sublimità d' ingegno, che vi si ravvisano ad ogni passo, e meritino perciò di essere studiate e meditate attentamente da' coltivatori della Geometria degli Antichi; pure, non bisogna negarlo, non eran sì facili a comprendersi e ritenersi da' giovani; e questa ragione ha fatto allontanare tutti coloro, che hanno esposto un tal Libro di Archimede dal sistema di dimostrare da lui tenuto. Ma la maggior parte di costoro, avendo adottate le teoriche dell'infinito, si sono di gran lunga allontanati dal sistema elemenre, conveniente ad un libro di geometrica istituzione. Queste ragioni mi fecero esitar lungamente sul metodo che doveva adottare; ma fortunatamente mi riesci carpire dal Libro XII. degli Elementi di Euclide un principio del quale questi erasi prevalso per la dimostrazione della Prop. XVIII., il quale mi ha somministrato il mezzo di concilia-

re nelle verità Archimedee la semplicità e facilità delle dimostrazioni, col rigor geometrico, ch'era la prima ed essenzial cosa, a cui doveva aversi riguardo.

Conviene inoltre far osservare, che le superficie curve de' tre corpi rotondi, che Archimede trasmutava speciosissimamente in cerchi, le ho esibite in rettangoli: poichè in tal modo non solamente riesce più comodo il servirsene nella pratica, ove spesso si ha bisogno della loro misura; ma anche era ciò necessario, per preparare i giovani, i quali debbono percorrere l'intera carriera delle Matematiche, all'applicazione de' metodi sommatorj alla quadratura delle superficie curve, ove non si possono gli elementi di queste esprimere altrimenti, che secondo l'esibizione che ho data. Aggiungasi benanche, che in questo modo mi è riuscito più facile l'applicarvi per le dimostrazioni quel principio Euclideo, del quale quì sopra ho parlato. Affinchè però il giovane, imbattendosi a leggere le Opere di Archimede (come deve necessariamente fare volendo progredire nella Geometria degli Antichi, e perfezionarsi colla conoscenza de' loro metodi) non concepisse il minimo dubbio per tal diversità di esibizione delle superficie di que' solidi, ed anche perchè sì maravigliose trasformazioni Archimedee non fossero affatto dimenticate, ho rapportato in uno Scolio a ciascuno di que'Teoremi la corrispondenza che v'era tra le mie esibizioni, e quelle del Geometra Siracusano, riducendo facilmente le une alle altre. Da tutto ciò ognuno rileverà facilmente, che il presente Libro sulla Sfera

e sul Cilindro non ha di Archimede che le sole verità; mentre il modo di enunciare la maggior parte di esse; e quello ch'è più quasi tutte le dimostrazioni, sono interamente diverse dalle Archimedee.

Siccome Archimede non avea esibite le superficie de' corpi rotondi per mezzo di figure rettilinee, così tralasciò ancora di recar ne' suoi Teoremi la riduzione delle loro solidità a quelle di solidi terminati da piani, contentandosi solamente d'indicare il rapporto, che v'era tra loro, e completando così in certo modo ciò, che aveva intrapreso a fare Euclide nella Proposizione 10. del Libro XII de' suoi Elementi. Or è chiaro, che da tali riduzioni non si poteva ricavare verun vantaggio per la pratica; e perciò io vi ho aggiunto un teorema, nel quale ho stabilito il rapporto tra una piramide ed un cono; dal quale poi facilmente si deriva la riduzione del Cilindro, e della Sfera ad un solido terminato da piani.

L'altro Libro di Archimede sebbene tratti dello stesso argomento che il precedente, non è però un Libro elementare, che perciò non vi era bisogno, nè si poteva, anche per ragion di metodo recarlo in queste nostre Istituzioni. Esso è un di que' libri geometrici destinati al perfezionamento della Scienza; e quindi necessario a studiarsi da coloro che vogliono progredire nell'Analisi Geometrica degli Antichi.

Le ricerche che vi si trattano sono le seguenti.

I°. *Ritrovare una Sfera uguale ad un cono, o ad un cilindro dato.*

II°. *A qual cono sia uguale una qualunque porzione di sfera.*

III°. *Dividere una sfera data in modo con un piano, che le due parti della superficie di essa sieno in data ragione.*

IV°. *O pur sieno in data ragione i due segmenti sferici ne' quali la sfera resta divisa dal piano.*

V°. *Date due porzioni sferiche, costituirne una terza simile ad una delle date, ed uguale all' altra.*

VI°. *Date due porzioni sferiche di una stessa sfera o pur di sfere diverse; costituire una terza porzione sferica simile ad una delle date, e che abbia la sua superficie uguale a quella dell' altra.*

VII°. *Troncare da una sfera una porzione sferica che abbia ragion data al cono che ha la stessa base e la medesima altezza di tal porzione.*

VIII°. *Se una sfera si seghi con un piano che non passi per lo centro; la porzione maggiore starà alla minore in minor ragione della duplicata della superficie di quella alla superficie di questa.*

IX°. *La mezza sfera è la massima di tutte le porzioni sferiche della medesima superficie.*

Or da tutte queste ricerche importanti, come la sola loro enunciazione anche lo mostra, noi abbiamo estratta solamente la seconda, la quale forma una continuazione colle ricerche del Libro I°., e l'abbiamo in questo inserita, esibendo però il seg-

mento sferico per un cono diverso in base ed in altezza da quello assunto da Archimede, e riducendo poi la nostra esibizione all' Archimedea nello Scolio a tal Proposizione: e di questo operato ne renderemo ragione nella Nota su tal Proposizione.

Come anche per ragion di metodo abbiamo dovuto estrarre dal Libro della Misura del Cerchio la Proposizione che assegnava l'aja di questa figura per un triangolo; perchè, per la nostra maniera di esporre le verità Archimedee sulla Sfera e sul Cilindro, tal verità diventava fondamentale, ed abbiamo dovuto inserirla in principio di questo nostro presente Libro. Le rimanenti ricerche poi a farsi per la misura del cerchio, che sono di pura approssimazione, e geometrico-aritmetiche, essenziali però a ridurre in pratica le verità contenute nel Libro di Archi- sulla Sfera e sul Cilindro di cui sono perciò una necessaria continuazione, le abbiamo esibite, seguendo Archimede stesso, in un Libro separato. E siccome dopo tante approssimazioni sì grandi, che si sono ritrovate per la quadratura del cerchio da' moderni Geometri, sarebbe stato poco conveniente, che io avessi ritenuta quella di Archimede; perciò ho cercato tra le ultime quella, che fosse più energica, e per la quale non vi fosse bisogno, che di soli artificj elementari di Geometria, e di Aritmetica; e questa mi è sembrata esser quella dell' illustre Geometra Giacomo Gregory, che ho esposta in una maniera semplicissima, e molto adattata alle menti de' giovani.

IL PRIMO LIBRO
DI
ARCHIMEDE
SULLA SFERA, E SUL CILINDRO.

DEFINIZIONI. *V. N.*

I. Se da un punto della circonferenza del semicerchio generatore della sfera si abbassi la perpendicolare al diametro; ciascuno di que' solidi, che, nel generarsi la sfera, vien descritto da uno de' due semisegmenti circolari, ne' quali resta diviso il semicerchio, si dirà *segmento sferico*: e l' *altezza* del segmento sferico sarà quella parte del diametro, che gli corrisponde nel semisegmento circolare, che lo genera.

II. Il *settore sferico* è quel solido, che si descrive da un settore circolare, il quale si rivolga dintorno ad uno de' suoi raggi immobile, finchè ritorni dove cominciò il suo moto.

Un tal solido è composto da un segmento sferico al quale sia aggiunto, o pur ne sia tolto quel cono la cui base è il cerchio, ch' è base di esso segmento, ed il vertice è il centro della sfera.

III. Il *rombo conico* è quel solido, che si descrive da un triangolo qualunque, il quale si rivolga dintorno ad un suo lato, che comprende angoli acuti con ciascuno de' rimanenti.

È chiaro, che un tal solido sia composto da due coni, i quali hanno la base comune, ed i loro assi per dritto.

V. N.

PRINCIPJ.

I. La linea retta è la più breve di quante linee si tirano da un punto ad un altro.

II. Le due tangenti, che da un punto preso fuori di un cerchio si conducono al cerchio, sono maggiori dell' arco circolare che resta tra i contatti.

III. Il piano è la minima di tutte le superficie, che hanno gli stessi termini.

IV. Se due superficie comunque composte da altre superficie curve, o piane, sieno concave verso uno stesso piano, nel quale hanno comune il loro termine; di esse sarà sempre minore quella, ch' è compresa, tuttochè avesse coll' altra una parte comune.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se s'inseriva un poligono in un cerchio; il perimetro del poligono è minore della circonferenza del cerchio.

Ciò è chiaro; poichè ciascun lato di un tal poligono è minore dell' arco che da esso è sotteso *.

* pr. I.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se si circonscriva un poligono ad un cerchio; il perimetro del poligono circonscritto è maggiore della circonferenza del cerchio.

Al cerchio BFL si circonscriva il poligono AKGEC: *fig.* 58. dico che il perimetro di un tal poligono sia maggiore della circonferenza del cerchio.

Poichè le tangenti BA, AL sono maggiori dell' arco BL, ch' è tra i contatti*; e similmente le tangenti BC, CD sono maggiori dell' arco BD; le DE, EF maggiori dell' arco DF; le FG, GH maggiori dell arco FH; e le HK, KL maggiori dell' arco HL: perciò l' intero perimetro del poligono è maggiore della circonferenza del cerchio. C. B. D.

* *pr.* 2.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Ogni cerchio è uguale al triangolo rettangolo, di cui un lato intorno all' angolo retto rappresenti la circonferenza del cerchio, e l' altro sia uguale al raggio. *V. N.*

Sia il cerchio ABCD descritto col raggio OA, ed intorno al centro O; ed un lato XY, che comprende l' angolo retto X del triangolo rettangolo ZXY rappresenti la circonferenza del cerchio ABCD, l' altro lato ZX sia uguale al raggio OA: dico che questo triangolo ZXY sia uguale al cerchio ABCD. *fig.* 59.

Poichè se il triangolo ZXY non è uguale al cerchio

ABCD, dovrà pareggiare un cerchio minore di ABCD, o pur maggiore. Suppongasi primieramente uguale ad un cerchio minore di ABCD, e sia questo l'altro, *abcd* descritto dintorno allo stesso centro O. S'inscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFCD di un numero pari di lati uguali, il qual non tocchi

*16.XII. il cerchio minore *abcd**; è chiaro che se dal centro O si tirino i raggi a' vertici degli angoli di questo poligono, resterà esso diviso in tanti triangoli, quanti sono i suoi lati. E poichè le perpendicolari, che dal centro O si abbassano su i lati uguali del poligono

14.III. inscritto nel cerchio, sono uguali; perciò que' triangoli saranno tutti ugualmente alti; quindi la somma loro, cioè il poligono, dovrà essere uguale ad un solo triangolo, che abbia per base la somma delle basi di quelli, cioè il perimetro del poligono, e per altezza la OP, loro altezza comune. E poichè la circonferenza del cerchio ABCD è maggiore del perimetro del poligono AEBFCD inscritto in esso, si potrà perciò tagliare dalla XY la X*y* uguale a questo perimetro: similmente si prenda sulla XZ la X*z* uguale alla OP, ch'è minore del raggio OA, o sia di XZ, e poi si congiunga la *zy*; sarà il triangolo *z*X*y* uguale al poligono AEBFCD. Ma questo triangolo è minore dell'altro ZXY, che si è supposto pareggiare il cerchio *abcd*; quindi dovrà esser anche il poligono AEBFCD minore di un tal cerchio; che non può essere. E perciò non può il triangolo ZXY essere uguale ad un cerchio minore di ABCD.

Or dico che nè anche possa quel triangolo ZXY pareggiare un cerchio GHKL maggiore dell'altro ABCD. Poichè se lo può, suppongasi quel cerchio descritto dintorno allo stesso centro O, e s'inscriva in esso il poligono GMHNKL di un numero pari di lati ugua-

*16.XII. li, che non tocchi il cerchio minore ABCD. E poi-

chè il perimetro di questo poligono è maggiore del perimetro di quell'altro simile ad esso, che si potrebbe circonscrivere al cerchio ABCD; e questo è maggiore della circonferenza del cerchio ABCD, e quindi della XY; sarà perciò anche il perimetro del poligono GMHNKL maggiore della XY. Ciò posto si prolunghi questa XY in T, finchè la XT sia uguale al perimetro del poligono GMHNKL; e prolungata anche la XZ in R, finchè la XR sia uguale alla perpendicolare OQ, che dal centro O si abbassa sopra un lato del poligono GMHNKL, la quale è maggiore del raggio PO, si congiunga la RT: sarà il triangolo RXT uguale al poligono GMHNKL. Quindi siccome il triangolo RXT è maggiore dell'altro ZXY, così anche il poligono GMHNKL dovrebbe esser maggiore del cerchio GHKL nel quale è inscritto: lo che ripugna. Laonde nè pure può il triangolo ZXY essere uguale ad un cerchio maggiore di ABCD. Ma si è dimostrato, che non poteva quel triangolo pareggiare un cerchio minore dello stesso cerchio ABCD; dovrà perciò essere uguale a questo cerchio. C. B. D.

SCOLIO.

I lati XY, X*y* intorno all' angolo retto X de' due triangoli ZXY, *z*X*y* rappresentino le circonferenze di due cerchi, e gli altri due lati XZ, X*z*, che sono anche dintorno allo stesso angolo, sieno rispettivamente uguali a' raggi degli stessi cerchi; saranno essi triangoli ZXY, *z*Z*y* uguali a' cerchi de' raggi XZ, X*z** : quindi siccome questi cerchi sono tra loro come i quadrati de' diametri, o pur de' raggi XZ, X*z**; perciò dovrà anche stare il triangolo ZXY al triangolo *z*X*y*, come il quadrato di XZ a quello di X*z*. Ma i triangoli ZXY, *z*X*y* sono rispettivamente le metà de' rettangoli di ZX

* p. 3.
* 2.XII.

in XY, e di zX in Xy; quindi sarà pure il rettangolo di ZX in XY a quello di zX in Xy, come il quadrato di ZX a quello di zX: e permutando starà il rettangolo di ZX in XY al quadrato di ZX, come il rettangolo di zX in Xy al quadrato di zX, cioè starà XY a ZX, come Xy a zX*; e di nuovo permutando XY ad Xy, come ZX a zX. Vale a dire

* 1.VI.

Le circonferenze de' cerchi sono tra loro come i raggi.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se in un cono s' inscriva una piramide a base equilatera; la superficie di questa piramide, senza la base, è uguale ad un triangolo rettangolo di cui un lato dintorno all' angolo retto sia uguale al perimetro della base della piramide, e l' altro lato sia quanto l' altezza di uno de' triangoli uguali, che formano la detta superficie.

fig. 60.

Sia il cerchio BAC la base di un cono, e 'l rettilineo equilatero BAC inscritto in questo cerchio dinoti la base della piramide inscritta nel cono; e sia inoltre il triangolo rettangolo EFG, di cui un lato FG intorno all' angolo retto è uguale al perimetro del rettilineo BAC, e l' altro lato FE è quanto l' altezza di uno de' triangoli uguali, che contengono quella piramide: dico che questo triangolo EFG pareggi la superficie di tal piramide, senza la base.

Poichè sono uguali i lati del rettilineo ABC; perciò i triangoli che contengono quella piramide saranno perfettamente uguali; e per conseguenza avranno anche uguali le loro altezze; e ciascuna di queste verrà

rappresentata dalla FE. Laonde se la FG si divida nelle FH, HK, KG uguali alle AB, BC, CA, e si congiungano le EH, EK, EG; i triangoli FEH, HEK, KEG avendo la stessa altezza di quelli, che contengono la piramide, gli saranno uguali: perciò la somma di questi, cioè la superficie della proposta piramide, senza la base, dovendo pareggiare la somma di quelli, sarà uguale al triangolo EFG. C. B. D.

PROPOPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se i punti, ne' quali due lati di un cono incontrano la circonferenza della base, si congiungano con una linea retta; n' emergerà un triangolo, che sarà minore della superficie conica, ch' ei sottende. V. N.

N. B. Chiamasi *lato* del cono l' ipotenusa del triangolo rettangolo generatore di questo solido, qualunque sia il luogo, ov' ella si ritrovi in una tal genesi. E sarà facile, dopo ciò, il supplire, per l' intelligenza dell' enunciazione del seguente teorema, la definizione del *lato* del cilindro.

Sieno DA, DC due lati del cono BACD, ed i punti A, C ne' quali essi incontrano la circonferenza BAC si congiungano colla AC: dico che il triangolo ADC sia minore della superficie conica, ch' ei sottende. *fig.* 61.

Sia una tal superficie quella, ch' è rappresentata dalla ABCD. Si seghi l' arco ABC per metà in B, e si uniscano le AB, BC, BD: saranno i due triangoli BAD, BCD maggiori del triangolo ADC

Imperocchè se si costituiscano al centro *d* del cerchio *acb* descritto col raggio *da* uguale a DA, i tre angoli *adb*, *bdc*, *cde* uguali rispettivamente a' tre *fig.* 62.

altri angoli ADB, BDC, CDA, è chiaro che il punto *e* non potrà cadere in *a*; perchè altrimenti i tre angoli *adb*, *bdc*, *cde*, e quindi i loro uguali in D formerebbero quattro retti *. Laonde l' arco *ce* sarà minore dell' arco *cea*. Ma poichè gli angoli *cdb*, *bda* insieme presi, sono maggiori dell' angolo *cde* *: l' arco *cba* dovrà pure esser maggiore dell' arco *ce*; adunque la corda *ca* dividendo la circonferenza *abce* in due archi, ciascuno maggiore dell' arco *ce*, dovrà esser maggiore della corda *ce* di quest' altro arco. Or si congiungano le *ab*, *bc*, *ce*, e la *bd* incontri la *ca* in *m*, gli dovrà essere perpendicolare; perciò i due triangoli *bdc*, *bda*, che sono uguali, pareggeranno insieme presi il rettangolo di *bd*, loro base comune, in *cm*, altezza di uno di essi. E se si abbassi da *d* sopra *ce* la perpendicolare *dn*, il triangolo *dce*, ch' è doppio dell' altro *dnc*, sarà anche uguale al rettangolo di *dn* base comune alle sue due metà *ndc*, *nde* in *nc* altezza di una di queste. Per lo che siccome *cm* si è dimostrata maggiore di *cn*, e che *db* è maggiore di *dn*, così il primo de' detti rettangoli sarà maggiore dell' altro; cioè i due triangoli *cdb*, *bda*, o i loro uguali CDB, BDA, saranno maggiori del triangolo *cde*, o sia CDA: come si è qui sopra assunto. Ciò premesso si supponga essere il rettilineo H l' eccesso di que' due triangoli su di questo; sarà H o minore de' segmenti circolari AEB, BFC, o pure non minore.

Sia in primo luogo non minore. E poichè la superficie BAED composta dalla superficie conica AEBD, e dal segmento circolare AEB ha gli stessi termini, che il triangolo ABD, sarà essa maggiore di questo triangolo*. Similmente l' altra superficie BCFD composta dalla superficie conica BFCD, e dal segmenro BFC è maggiore del triangolo BDC. Adunque l' intera superficie conica ABCD insieme co' segmenti circolari AEB,

* 21.XI.

* 20.XI.

* pr. 3.

BFC è maggiore de' triangoli ADB, BDC. Ma si è supposto, che lo spazio H sia non minore di que' segmenti circolari; quindi la superficie conica ABCD insieme con lo spazio H, è maggiore de' triangoli ADB, BDC, e perciò anche del triangolo ADC insieme con lo spazio H, la qual somma s'era supposta uguale a que' triangoli. Laonde, toltone di comune lo spazio H, sarà la rimanente superficie conica ABCD maggiore del triangolo ADC.

Sia adesso lo spazio H minore de' segmenti circolari AEB, BFC. Si dividano per metà gli archi AB, BC in E, F, e si uniscano le AE, EB, BF, FC; sarà ciascuno de' triangoli AEB, BFC maggiore della metà del segmento circolare nel quale consiste; e continuando a dividere in due parti uguali le metà degli archi AB, BC, dovrà finalmente pervenirsi a de' segmenti circolari minori dello spazio H *: sieno questi quelli, che insistono sulle linee rette AE, EB, BF, FC, e si uniscano le DE, DF. E poichè la superficie EAGD composta dalla superficie conica AGED, e dal segmento circolare AGE, è maggiore del triangolo ADE; e che l'altra superficie BEMD è maggiore del triangolo EDB; sarà perciò tutta la superficie MBEAGD, che componesi dalla superficie conica AEBD, e da' segmenti circolari AGE, EMB, maggiore de' triangoli ADE, EBD. Laonde essendo i triangoli AED, DEB maggiori del triangolo ABD; la superficie MBEAGD sarà molto maggiore del triangolo ADB. Per la stessa ragione anche la superficie KBFCLD è maggiore del triangolo BDC; quindi le due superficie MBEAGD, KBFCLD, cioè la superficie conica ABCD, insieme co' segmenti circolari AGE, EMB, BKF, FLC, sarà maggiore de' triangoli ABD, DBC. Ma questi triangoli sono uguali al triangolo ADC insieme con lo spazio H; e que' segmenti, che abbiamo nominati, sono minori di esso

* *Di* 2.XII

spazio H: perciò la rimanente superficie conica ABCD è maggiore del triangolo ADC. C. B. D.

COR. Quindi *se s' inscriva in un cono una piramide; la superficie di questa è minore della superficie del cono, non considerandovi le loro basi.*

Poichè ciascuno de' triangoli, che comprendono la piramide è minore della superficie conica, ch' esso sottende.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se al cerchio, ch' è base di un cono, si tirino due tangenti, le quali s' incontrino fra loro; i triangoli, che avranno per basi queste tangenti, e per vertice quello del cono, saranno maggiori della superficie conica, che da essi si comprende.

fig. 62. Sia il cerchio ACB la base di un cono, che ha per vertice il punto E, e ad un tal cerchio si tirino le due tangenti AD, CD, le quali s' incontrino in D, e si uniscano le AE, DE, EC: dico che i triangoli AED, DEC sieno maggiori della superficie conica ABCE contenuta da' lati AD, DC del cono, e dall'arco ABC.

Si divida quest' arco ABC per metà in B, e per B si tiri al cerchio ACB la tangente GBF, la quale incontri le AD, DC in G, F; sarà questa tangente parallela alla corda AC tirata fra i contatti A, C; poichè la perpendicolare, che dal centro O si abbassa sulla AC, dovendo divider per metà questa corda, e l' arco ABC, ch' esso sottende, dovrà passare per lo punto B, ed esser anche perpendicolare alla tangente GBF: finalmente si congiungano le EF, EG. E poichè le FD, DG sono maggiori della FG, aggiuntevi di

comune le AG, CF, saranno le AD, DC maggiori delle AG, GF, FC. Or la tangente AD è perpendicolare al raggio AO del cerchio ACB, e questo raggio è la comune sezione di un tal cerchio, ch' è base del cono, e del triangolo AOE, che lo descrive; che perciò la DA dovrà esser perpendicolare al piano del triangolo AOE *, e quindi alla AE, ch' esiste in un tal piano *. Similmente si dimostrerà, che ogni altro lato EB, EC, *ec.* del cono sia perpendicolare alla tangente il cerchio ACB nel suo estremo, B, C, *ec.* Quindi i triangoli EAD, ECD, AEG, GEF, FEC hanno tutti la stess' altezza, cioè il lato del cono; e perciò i due primi staranno agli altri tre, come AD, DC ad AG, GF, FC; la qual cosa si dimostra facilmente. Per lo che essendo le AD, DC maggiori delle AG, GF, FC; saranno anche i triangoli AED, DEC maggiori de' triangoli AEG, GEF, FEC. Dinoti lo spazio H l' eccesso di que' due primi triangoli su questi tre altri: potrà H esser minore de' trilinei AGB, BFC compresi dalle tangenti AG, GF, FC, e dagli archi circolari AB, BC tra i contatti, o pur non minore.

*d.4.XI.

Sia primieramente H non minore di questi trilinei. E poichè i triangoli AEG, GEF, FEC, ed il quadrilatero AGFC compongono una superficie, e questa, e l' altra superficie, che si compone dalla superficie conica ABCE, e dal segmento circolare ABE hanno gli stessi termini nel piano AEC, cioè i lati del triangolo AEC, e sono entrambe rivolte colla loro concavità verso questo piano; perciò sarà quella prima superficie maggiore della seconda*. Laonde toltone di comune il segmento circolare ABC, resterà la somma de' triangoli AEG, GEF, FEC, e de' trilinei AGB, BFC maggiore della superficie conica ABCE. Ma lo spazio H si è supposto non minore de' trilinei AGB, BFC; adunque sarà anche la somma di que' tre trian-

*pr. 4.

goli, e dello spazio H maggiore della superficie conica ABCE: perciò siccome que' tre triangoli insieme con lo spazio H erano uguali a' due triangoli AED, DEC; così anche questi saranno maggiori della superficie conica ABCE.

Che se lo spazio H si supponga minore de' trilinei AGB, BFC; si dividano per metà gli archi AB, BC ne' punti K, L, per gli quali si tirino al cerchio ACB le tangenti MN, XR; queste taglieranno da essi trilinei AGB, BFC i triangoli MGN, XFR, che ne sono più che la metà. Imperocchè congiungansi le OB, AK, OG; questa OG dividendo per metà l' angolo AOB, dovrà passare per lo punto K; ed essendo AM uguale ad MK ed MK minore di MG, sarà anche AM minore di MG; quindi il triangolo GKM essendo maggiore dell' altro MKA*, è molto più che la metà del trilineo GKA: e così pure dimostrando, che il triangolo GKN, sia più che la metà del trilineo GKB, ne segue che l' intero triangolo MGN sia più che la metà del trilineo AGB. Similmente si dimostra che il triangolo XFR sia più che la metà del trilineo BFC. Se dunque si continuino a dividere per metà gli archi AK, KB, BL, LC, e si tirino le tangenti al cerchio ACB, si dovrà pervenire finalmente a de' trilinei minori dello spazio H*. Sieno questi i trilinei AMK, KNB, BXL, LRC, e si congiungano le ME, NE, XE, RE. Si dimostrerà come poc' anzi, che i triangoli AEG, GEF, FEC sieno maggiori de' triangoli AEM, MEN, NEX, XER, REC; poichè le basi AG, GF, FC, di quelli, insieme prese, sono maggiori della somma delle basi AM, MN, NX, XR, RC di questi, e l' altezza loro comune è il lato del cono: e che la superficie composta da' triangoli AEM, MEN, NEX, XER, REC, e dal rettilineo AMNXRC, avendo gli stessi termini nel piano AEC

* 1. VI.

* l. p. 28. XI.

coll' altra superficie composta dal segmento circolare ABC, e dalla superficie conica ABCE, e comprendendola, ne sia maggiore. Che perciò togliendone di comune il segmento circolare ABC, resteranno i triangoli AEM, MEN, NEX, XER, REC insieme co' trilinei AMK, KNB, BXL, LRC maggiori della superficie conica ABCE. Ma que' trilinei si erano supposti minori dello spazio H; quindi molto più la somma de' triangoli AEM, MEN, NEX, XER, REC, e di H, sarà maggiore della superficie conica ABCE; per lo che di questa stessa dovrà essere molto maggiore la somma de' triangoli AEG, GEF, FEC, e di H. E finalmente siccome l' ultima delle indicate somme è uguale a quella de' due triangoli AED, DEC, così anche questa dovrà esser maggiore della stessa superficie conica ABCD. C. B. D.

Cor. 1. Si rileva da ciò, che: *La superficie di una piramide circonscritta ad un cono, è maggiore della superficie del cono, non considerando le loro basi.*

Poichè si è dimostrato, che i due triangoli, che hanno per basi le tangenti il cerchio base del cono, le quali s' incontrano, e per vertice quello del cono sono maggiori della superficie conica, che resta tra essi. E così continuandosi a dimostrare, si conchiuderà ciò che si è enunciato.

Cor. 2. Di più, che: *Ogni altra piramide, che abbia lo stesso vertice di un cono, e per base un poligono simile, similmente posto, è maggiore di quello, ch' è base della piramide circonscritta al cono stesso, avrà la sua superficie maggiore di quella di un tal cono, non considerando le loro basi.*

Poichè è chiaro, che ciascun triangolo di quest' altra piramide è maggiore del corrispondente nella piramide circonscritta al cono, per aver la base e l' altezza maggiore.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se si congiungano gli estremi corrispondenti di due lati di un cilindro; n' emergerà un quadrilatero minore della superficie cilindrica, ch' ei sottende.

fig. 63. Sia il cerchio AEB la base di un cilindro, e CFD il piano opposto ad essa. Sieno inoltre AC, BD due lati di questo solido, ed AB, CD le congiungenti i loro termini corrispondenti: dico che il quadrilatero ABCD sia minore della superficie cilindrica AEBDFC, ch' ei sottende.

Si dividano per metà i due archi AB, CD ne' punti E, F, e si uniscano le AE, EB, CF, FD. E poichè le AC, BD sono uguali, e parallele all' asse del cilindro, saranno uguali, e parallele tra loro *; e perciò la figura ABDC è un parallelogrammo, il quale è chiaro, che sia rettangolo, ed abbia la stess' altezza del cilindro: e similmente si dimostra, che sieno parallelogrammi rettangoli le figure AF, FB, e che abbiano per loro altezza quella del cilindro. Laonde i tre rettangoli AF, FB, AD sono ugualmente alti; e perciò staranno i due rettangoli AF, FB, presi insieme, all' altro AD, come le AE, EB alla AB. Ma la somma delle AE, EB è maggiore della AB: adunque anche i rettangoli AF, FB saranno maggiori del rettangolo AD. Dinoti lo spazio H l' eccesso di quelli su questo; sarà un tale spazio H o minore de' segmenti circolari AGE, EKB, CLF, FMD, o pur non minore.

* 9. XI.

Sia primieramente non minore. E poichè la superficie GEACFL composta dalla superficie cilindrica,

ch'è tra le CA, FE, e da' segmenti circolari AGE, CLF, è maggiore del rettangolo ACFE con cui ha gli stessi termini *, cioè le linee rette AC, CF, FE, EA: e che similmente l'altra superficie KEBDFM è maggiore del rettangolo EBDF; perciò le due superficie GEACFL, KEBDFM, prese insieme, cioè la superficie cilindrica AEBDFC, ch'è sottesa dal rettangolo ABDC, insieme co' segmenti circolari AGE, EKB, CLF, FMD, sarà maggiore de' rettangoli AF, FB. Ma questi rettangoli sono uguali all' altro ACDB insieme con lo spazio H: quindi la superficie cilindrica AEBDFC insieme con que' segmenti circolari, sarà maggiore del rettangolo ACDB insieme con H. È poi H maggiore de' segmenti circolari; perciò dovrà quella rimanente superficie cilindrica esser maggiore del rettangolo ACDB.

* pr. 4.

Sia ora lo spazio H minore di que' segmenti circolari. Si divida per metà ciascun arco AE, EB, CF, FD, poi le loro metà dividansi anche in due parti uguali, e ciò si continui a fare, finchè vi restino de' segmenti circolari minori dello spazio H*: sieno questi quelli, che insistono sulle linee rette AG, GE, EK, KB, CL, LF, FM, MD. Dimostreremo, come nella parte precedente, che i rettangoli AL, GF, EM, MB sieno maggiori degli altri AF, FB, e che le superficie cilindriche, che sono comprese tra i lati AC, GL; GL, EF; EF, KM; KM, BD insieme co' segmenti circolari, che hanno per corde le AG, GE, GE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, cioè l'intera superficie cilindrica, ch'è tra le AC, BD, insieme con que' segmenti circolari, sia maggiore de' rettangoli AL, GF, EM, MB, e quindi anche degli altri AF, FB, o sia del rettangolo ACDB insieme con lo spazio H. Per lo che essendo que' segmenti circolari minori dello spazio H; dovrà la rimanente superficie cilin-

* l. p. 28. XI.

drica AEBDFC esser maggiore del rettangolo ACBD. C. B. D.

COR. Quindi *se s' inscriva un prisma in un cilindro; la superficie del prisma è minore della superficie del cilindro, non considerando le loro basi.*

Imperocchè ciascun parallelogrammo, che compone la superficie del prisma, è minore, della superficie cilindrica, ch' è costituita su di esso.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se per gli estremi di due lati di un cilindro, si tirino le tangenti a' cerchi, che sono le basi di questo solido, le quali s' incontrino rispettivamente fra loro; unendo questi punti di concorso emergeranno due rettangoli maggiori della superficie cilindrica compresa tra essi.

fig. 64. Sia il cerchio ACB una delle basi di un cilindro, e CG, AE sieno due suoi lati; per gli estremi A, C, E, G de' quali sieno tirate a' cerchi ACB, EGF, basi del cilindro, le tangenti AD, CD; EH, GH, che s' incontrino rispettivamente fra loro in D, ed H; e questi punti si uniscano con la DH: dico che i quadrilateri DCGH, DAEH sieno due rettangoli, i quali insieme presi sono maggiori della superficie cilindrica, ch' essi comprendono, cioè di quella, ch' è terminata da' lati EA, GC, e dagli archi ABC, EFG.

Si tirino le AC, EG fra i contatti. E poichè i lati AE, CG del cilindro proposto sono perpendicolari al piano della sua base ACB*, dovranno i piani AH, HC condotti per essi, e quindi la loro intersezione DH esser anche perpendicolare al piano ACB*:

* d. 21. XI.

* 18. XI.

laonde la DH sarà parallela a ciascuna delle AE, CG*. * 6. XI.
Ma è pure la AD parallela alla EH, perchè tali rette sono le comuni sezioni del piano EADH con quelli de' cerchi ACB, EGF, che sono paralleli*; adunque il * 16. XI. quadrilatero AEHD è un parallelogrammo; e tale sarà anche l' altro DCGH: ed è poi chiaro, che tali parallelogrammi sieno rettangoli ugualmente alti, che il cilindro. Ciò posto, si dividano per metà gli archi ABC, EFG in B, F, e per questi punti si tirino a' cerchi ACB, EGF le tangenti KBL, IFM, e si congiungano le IK, LM: si dimostrerà come poc' anzi, che i quadrilateri EAKI, IKLM, LMGC sieno rettangoli ugualmente alti che il cilindro. E poichè le basi DA, DC de' due rettangoli DE, DG sono maggiori delle basi AK, KL, LC de' tre altri rettangoli KE, KM, LG ugualmente alti che quelli; perciò que' due saranno maggiori di questi tre. Sia lo spazio N l' eccesso di quelli su questi; sarà questo spazio N o minore de' trilinei CLB, BKA, GMF, FIE, o pur non minore.

Sia in primo luogo non minore. E poichè la superficie, che si compone dai tre rettangoli AI, IL, LG, e dai quadrilateri EIMG, AKLC ha gli stessi termini nel piano EACG con l' altra superficie, che si compone dalla superficie cilindrica, ch' è tra i lati EA, GC del cilindro, e gli archi EFG, ABC, e dai segmenti circolari EFG, ABC; e che di più la prima, e la seconda sono entrambe concave verso un tal piano EACG, e quella comprende questa; perciò la prima sarà maggiore della seconda*. Laonde togliendone * pr. 4. di comune i segmenti circolari ABC, EFG, resteranno i tre rettangoli AI, KM, LG insieme co' trilinei EIF, FMG, AKB, BLC maggiori della superficie cilindrica, ch' è racchiusa dalle EA, GC, e dagli archi EFG, ABC. Ma lo spazio N si è supposto non minore di quei quattro trilinei; quindi anche la som-

ma de' tre rettangoli AI, KM, LG, e di N sarà maggiore della stessa superficie cilindrica: e siccome quei tre rettangoli insieme con N pareggiavano i due rettangoli DE, DG, così saranno anche questi maggiori della superficie cilindrica ABCGFE.

Che se lo spazio N si supponga minore de' trilinei AKB, BLC, EIF, FMG; allora si dividano per metà continuamente gli archi AB, BC, EF, FG, e per gli punti di tali divisioni si tirino ad essi le tangenti, finchè si pervenga a de' trilinei minori dello spazio N. Suppongasi che questi siansi già ottenuti col dividere una sola volta per metà gli archi AB, BC, EF, FG, e tirare ad essi le tangenti pe' loro punti medj: è egli chiaro, che unendo i punti corrispondenti degl' incontri di queste tangenti colle altre AK, KL, LC, EI, IM, MG risulteranno tanti rettangoli ugualmente alti, a' precedentemente considerati, la somma de' quali insieme con quella de' trilinei compresi da que' loro lati che toccano i cerchi ACB, EGF, e dagli archi interposti tra essi si dimostrerà, come poc' anzi, che sia maggiore delle superficie cilindrica ABCGFE. E sostituendo a questi trilinei lo spazio N, che n' è maggiore, sarà molto più la somma di que' rettangoli, e di N maggiore della stessa superficie cilindrica ABCGFE. Ma la somma di que' rettangoli è minore di quella de' rettangoli AI, KM, LG, come si vede; adunque questa insieme collo spazio N, e quindi i rettangoli AH, HC, a' quali gli ultimi tre rettangoli insieme con N sono uguali, dovranno esser maggiori della superficie cilindrica ABCGFE. C. B. D.

Cor. 1. Quindi si rileva che: *La superficie di un prisma circonscritto ad un cilindro è maggiore della superficie del cilindro, non considerando le loro basi.*

Poichè si è dimostrato, che due rettangoli, che toccano un cilindro, ed hanno da una parte un lato

comune, e dall'altra sono terminati da due lati del cilindro, sono maggiori della superficie cilindrica, ch' essi comprendono; e così continuando a dimostrare, se ne conchiuderà ciò che si è detto.

COR. 2. Di più che: *Ogni altro prisma che abbia l'altezza stessa di un cilindro, e per ciascuna sua base un rettilineo simile, similmente posto e maggiore di quello ch'è base del prisma circonscritto al cilindro stesso, avrà la sua superficie maggiore di quella di un tal cilindro.*

Poichè ciascun rettangolo, che termina quest' altro prisma è maggiore del corrispondente nel prisma circonscritto al cilindro; mentre la base è maggiore della base, e l'altezza è la stessa.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

La superficie di un cilindro senza le basi, è uguale al rettangolo contenuto da una linea retta, che rappresenta la circonferenza della base di un tal cilindro, e da un lato di esso.

Il cerchio ABCD dinoti la base di un cilindro, il fig. 64 cui asse sia OV, che dinoterà anche un qualunque lato di un tal cilindro; e sia il rettangolo ZY contenuto dalla XY, che rappresenti la circonferenza del cerchio ABCD, e dalla ZX uguale ad OV: dico che questo rettangolo sia uguale alla superficie di quel cilindro senza le basi.

Poichè se il rettangolo ZY non è uguale alla superficie del cilindro, che ha per base il cerchio ABCD, e per asse OV, dovrà pareggiare la superficie di un cilindro descritto con lo stesso asse, e che abbia per base un cerchio minore del cerchio ABCD, o pur maggiore. Pareggi in primo luogo quella del cilindro,

la cui base è il cerchio *abcd* minore di ABCD, e concentrico. S'inscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFCD di un numero pari di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore *abcd*, e poi s'intenda eretto su di questo poligono un prisma dell'altezza del cilindro. E poichè il perimetro di un tal poligono è minore della circonferenza del cerchio ABCD*, la quale si è rappresentata con la retta XY, si tagli da questa la X*y* uguale a quel perimetro, e si compia il rettangolo Z*y*: sarà questo rettangolo, com'è chiaro, uguale alla superficie di quel prisma, e perciò maggiore della superficie del cilindro descritto sul cerchio *abcd**, e quindi anche del rettangolo ZY, che si è supposto uguale a questa superficie cilindrica. Lo che ripugna. Non può dunque il rettangolo ZX pareggiare la superficie di un cilindro, che abbia lo stesso asse OV del proposto, ed una base minore del cerchio ABCD.

* p. 1.

* c. 2. p. 8.

Sia dunque un tal rettangolo ZY uguale alla superficie di un altro cilindro anche descritto con lo stesso asse OV, ed avente per base il cerchio GHKL maggiore di ABCD, e concentrico. S'intenda similmente inscritto in questo cerchio GHKL un poligono GMHNKL di un numero pari di lati uguali, il quale non tocchi l'altro cerchio ABCD; e su di esso si erga poi un prisma dell'altezza OV, che verrà ad essere inscritto in quel cilindro. Ciò posto, poichè il perimetro del poligono GMHNKL è maggiore della circonferenza del cerchio ABCD*; e quindi anche della retta XY, che la rappresenta, si prolunghi la XY in T, finchè XT pareggi un tal perimetro, e compiasi il rettangolo ZT, sarà, come è chiaro, un tal rettangolo uguale alla superficie di quel prisma; quindi minore della superficie del cilindro descritto sul cerchio GHKL*, e per conseguenza del rettangolo ZY, che si è supposto uguale a questa. Lo che anche è un assurdo.

* p. 2.

* c. 1. p. 7.

Laonde non potendo il rettangolo ZY, contenuto dalla linea retta XY, che rappresenta la circonferenza del cerchio ABCD, e dall' altra ZX, ch' è quanto la OV, essere uguale alla superficie di un cilindro che ha per asse OV, la cui base sia un cerchio minore di ABCD, o pur maggiore; dovrà necessariamente pareggiare quella del cilindro di questa base C. B. D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

La superficie di un cilindro senza le basi sta ad una di queste, come il doppio lato del cilindro al raggio di una sua base.

Sia un cilindro che abbia per asse la linea retta AC, ed AE esprima il raggio della sua base: dico che debba stare la superficie del cilindro ad uno de' cerchi, che ne sono le basi, come il doppio di AC ad AE. *fig.* 66.

La linea retta AB rappresenti la circonferenza del raggio AE, ed essa si applichi perpendicolarmente alla AB nel suo estremo A, e si compia il rettangolo CB, che sarà uguale alla superficie del cilindro *; e se congiungasi la BE, il triangolo rettangolo EAB sarà uguale al cerchio ch' è la base di esso cilindro *. Or se si prolunghi la AC, finchè la AD ne sia doppia, e si congiunga la BD; è chiaro, che il triangolo BAD pareggiando il rettangolo CB*, sia al par di questo uguale alla superficie del proposto cilindro. Ma il triangolo DAB sta al triangolo EAB, come DA ad EA*, cioè come il doppio di CA ad EA. Adunque è vero, che la superficie del cilindro, che ha per asse CA, e per base il cerchio del raggio EA sta à questo cerchio, come il doppio dell' asse, o sia di un lato del cilindro, al raggio della base. C. B. D.

* p. 9.
* p. 3.
* 1. VI.

SCOLIO.

Fra CA, che dinota il lato del cilindro, e la doppia AE, ch'è il diametro della base si ritrovi la media proporzionale M; sarà il quadrato di M uguale al rettangolo di CA nella doppia AE, e perciò anche all'altro della doppia CA, cioè di DA in AE; giacchè questi due rettangoli sono uguali, per aver le basi reciprocamente proporzionali alle altezze *: laonde sarà anchè DA ad M, come M ad AE; e perciò DA ad AE in duplicata ragione di M ad AE, o sia come il cerchio del raggio M all'altro del raggio AE *. E quindi, poichè AD sta ad AE, come il triangolo DAB al triangolo EAB; starà anche quel triangolo a questo, come il cerchio del raggio M a quello del raggio AE. Ma il cerchio del raggio AE è uguale al triangolo EAB; poichè AB rappresenta la circonferenza di esso, ed AE è quanto il raggio *. Adunque anche il triangolo DAB dovrà pareggiare l'altro cerchio del raggio M. Ma quel triangolo si è detto essere uguale alla superficie del cilindro. Laonde:

La superficie di un cilindro, senza le basi, è uguale al cerchio il cui raggio è la media proporzionale tra 'l lato di un tal cilindro, e 'l diametro della sua base.

* 14.VI.
* 2.XII.
* p. 3.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

La superficie di un cono, senza le base, e uguale al triangolo rettangolo, di cui un de' lati dintorno all' angolo retto rappresenti la circonferenza della base di un tal cono, e l' altro sia quanto un lato di questo solido.

fig. 67. Sia il cerchio ABCD la base di un cono, ed OV il suo asse, VB un lato; e sia il triangolo rettan-

golo ZXV, di cui un lato XY intorno all'angolo retto rappresenti la circonferenza del cerchio ABCD, e l' altro XZ sia quanto VB: dico che questo triangolo debba pareggiare la superficie del cono ABCDV.

Poichè se un tal triangolo non è uguale alla superficie di questo cono; potrà supporsi pareggiar quella di un altro cono descritto con lo stesso asse, e che abbia per base un cerchio minore di ABCD, o pur maggiore. Sia primieramente uguale alla superficie di quel cono, che ha l' asse stesso OV, e per base il cerchio *abcd* minore dell' altro ABCD, e descritto dintorno allo stesso centro O. S' inscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFCD, di un numero pari di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore *abcd* *; e poi s' intenda su di questo poligono eretta la piramide, che ha per vertice il punto V, la quale verrà ad essere inscritta nel cono ABCDV Di poi dal vertice E di questa piramide su di un lato EB della sua base si abbassi la perpendicolare VP, che sarà minore, com' è chiaro, del lato VB del cono; indi si taglino dalle XY, XZ, le X*y*, X*z* rispettivamente uguali al perimetro del poligono AEBFCD, ed alla VP, e si congiunga la *zy*: sarà il triangolo *z*X*y* uguale alla superficie della piramide AEBFCDV*. Or la superficie di questa piramide è maggiore di quella del cono *abcd*V ch' essa comprende *; e si è supposto che questa superficie conica pareggi il triangolo ZXY: adunque dovrebb' essere il triangolo *z*X*y* maggiore dell' altro ZXY. Lo che ripugna. Non può dunque il triangolo ZXY pareggiare la superficie di un cono descritto con l' asse OV, e che abbia per base un cerchio minore di ABCD.

Sia dunque un tal triangolo ZXY uguale alla superficie di un altro cono GHKLV, che abbia lo stesso asse OV, e la cui base GHKL sia un cerchio mag-

* 16. XI.

* p. 4.

* c. 2. p. 16.

giore di ABCD, e concentrico. S' inscriva nel cerchio maggiore GHKL un poligono GMHNKL di un numero pari di lati uguali, il quale non tocchi il cerchio minore ABCD, e sopra un tal poligono s' intenda eretta la piramide, che ha per vertice il punto V, la quale essendo inscritta nel cono GHKLV avrà una superficie minore di quella di un tal cono * cioè del triangolo ZXY. Ciò posto, dal vertice V di questa piramide si abbassi su di un lato MH della sua base la perpendicolare VQ, che sarà, com' è chiaro, maggiore di VB lato del cono ABCDV; e si prolunghino le XY, XZ in T, ed in R, finchè XT pareggi il perimetro del poligono GMHNKL il quale è maggiore della circonferenza ABCD, e la XR pareggi la VQ: congiunta la RT, sarà il triangolo RXT uguale alla superficie di una tal piramide, e perciò minore del triangolo ZXY. Lo che anche ripugna. Quindi il triangolo ZXY nè pure può essere uguale alla superficie di un cono, che abbia l' asse OV, e per base un cerchio maggiore di ABCD. Ma si è dimostrato, che un tal triangolo nè anche poteva pareggiare la superficie di un cono il quale avesse per asse OV, e per base un cerchio minore di ABCD. Adunque dovrà quel triangolo essere uguale alla superficie del cono ABCDV. C. B. D.

* a. p. 5.

PROPOPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

La superficie di un cono, senza la base serba a questa la stessa ragione, che un lato del cono al raggio della base.

fig. 68. Sia un cono, che abbia per lato la linea retta AD, ed AE sia il raggio della sua base: dico che debba

stare la superficie di questo cono, senza la base, ad essa base, come AD ad AE.

Rappresenti la linea retta AB la circonferenza del raggio AE, ed essa si applichi perpendicolarmente alla AD, e si congiungano le DB, BE; saranno i triangoli DAB, EAB rispettivamente uguali alla superficie del cono *, ed a quella della base di esso *. E quindi siccome questi due triangoli sono tra loro, come AD ad AE; così sarà anche la superficie di quel cono alla sua base, come AD ad AE, cioè come il lato del cono al raggio della sua base. C. B. D.

* p. 11.
* p. 3.

Scolio.

Tra il lato AD di un cono, ed il raggio AE della sua base si trovi la media proporzionale M, starà AD ad AE in duplicata ragione di M ad AE*, cioe come il cerchio del raggio M a quello, che ha AE per raggio*. Ma AD sta ad AE, come il triangolo DAB all'altro EAB*: quindi anche quel triangolo starà a questo, come il cerchio del raggio M all'altro, che ha AE per raggio. È poi il cerchio del raggio AE uguale al triangolo AEB*. Adunque il cerchio del raggio M sarà uguale al triangolo DAB, cioè alla superficie di quel cono che poc'anzi si è veduto esser rappresentata da questo triangolo. Laonde:

* d. 19. V.
* 2. XII.
* 1. VI
* p. 3.

La superficie di un cono, senza la base, è uguale al cerchio, che ha per raggio la media proporzionale tra il lato di esso cono, e'l raggio della base.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se un cono si seghi con un piano parallelo alla base, la superficie conica ch' è tra i piani paralleli sarà uguale al rettangolo contenuto da quella parte del lato del cono, ch' è tra i piani suddetti, e da un' altra linea retta, che rappresenti la somma della metà della circonferenza della base del cono, e della metà del perimetro della sezione prodotta dal piano segante.

fig. 69. Sia il cono ABCD descritto dalla rivoluzione del triangolo rettangolo DOC intorno al suo lato DO, ed esso cono sia segato dal piano EFG parallelo alla base ABC: dico che la superficie conica, ch' è tra i piani paralleli ABC, EFG sia uguale al rettangolo contenuto dalla GC, e da un'altra linea retta uguale alla somma della metà della circonferenza ABC, e della metà del perimetro della sezione EFG.

Dal punto C si elevi la CH perpendicolare al lato DC del cono, ed uguale alla circonferenza del cerchio ABC; poi si congiunga la DH, e per G si tiri la GK parallela alla CH. Or il piano DOC segando i piani paralleli ABC, EFG fa parallele le comuni sezioni PG, OC di esso con questi *: quindi l'angolo DPG è retto al pari del suo interno ed opposto DOC; e perciò il triangolo DPG rivolgendosi dintorno a DP descrive un cono, e PG descrive il cerchio che n'è la base. Laonde la sezione EFG è un cerchio. E poichè per gli triangoli simili DCH, DGK sta, permutando, CH a GK, come CD a DG, e quindi come OC a PG; o come la circonferenza del raggio OC a quella del raggio PG *,

* 16.XI.

* s p.3.

perciò essendosi supposta la CH uguale alla circonferenza del raggio OC, sarà la GK uguale a quella del raggio PG*. Laonde i triangoli DCH, DGK sono rispettivamente uguali alle superficie de' coni ABCD, FEGD*; e perciò la loro differenza, cioè il trapezio CGKH sarà uguale alla superficie conica ch'è tra i piani paralleli ABC, EFG. Ma se si tiri per K la KL parallela alla DC, e si unisca CK, è chiaro, che il trapezio CGKH essendo uguale a' due triangoli CKH, CGK, sia quanto la somma de' rettangoli della metà di CH in LK, o CG, e della metà di GK in CG; e quindi uguale al rettangolo di CG nella metà di CH e GK, cioè nella metà delle circonferenze de' cerchi ABC, EFG. Adunque a questo stesso rettangolo sarà anche uguale la superficie conica, ch'è tra i piani paralleli ABC, EFG. C. B. D.

* 14. P.
* p. 114

Scolio I.

Per lo punto medio M della CG si tiri la MN parallela alla OC, o PG, e per G si tiri la GQ parallela alla PO, sarà RM la metà di QC, come l'è GM di GC. Ma è pure NR la metà delle OQ, PG: laonde tutta la NM sarà la metà delle CO, PG; e quindi la circonferenza del raggio NM sarà la metà di quella il cui raggio è la somma delle OC, PG, o sia delle circonferenze che hanno per raggi una la CO, e l'altra la PG*: che perciò la superficie conica ch'è tra i piani paralleli EFG, ABC sarà uguale al rettangolo di CG nella circonferenza del raggio NM.

* s. p. 8.

Scolio II.

Or tra la CG e la somma delle OC, PG si ritrovi la media proporzionale X, sarà CG ad X, come X a PG ed OC insieme, e come la circonferenza del

raggio X a quella che ha per raggio la somma delle
* s. p. 3. PG ed OC*, o finalmente come quella del raggio X alla somma delle circonferenze che hanno una per raggio la PG e l'altra la OC. Laonde sarà il rettangolo di GC nella somma delle circonferenze de' raggi PG, OC uguale all'altro di X nella circonferenza del raggio X. Ma quel primo rettangolo è doppio della
* p. 23. superficie conica ch'è tra i piani paralleli ABC, EFG*,
* p. 3. e 'l secondo è doppio del cerchio del raggio X*. Adunque la superficie conica suddetta sarà uguale al cerchio del raggio X. Che perciò:

Se un cono si seghi con un piano parallelo alla base, la superficie conica, ch' è tra i piani paralleli è uguale a quel cerchio, il cui raggio è la media proporzionale tra il lato del cono, ch' è tra questi piani, ed una linea retta uguale a' raggi de' due cerchi che sono in essi.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

F. N. *Ogni cono è uguale ad una piramide, la quale abbia per base un rettilineo uguale al cerchio base del cono, e la stess' altezza di questo solido.*

fig. 70. Sia il cerchio ABCD la base di un cono, ed OV il suo asse, o l'altezza; e la piramide PQRS abbia per base il rettilineo PQR uguale al cerchio ABCD, e la sua altezza PS pareggi la OV: dico che quel cono, e questa piramide sieno tra loro uguali.

Imperocchè se la piramide PQRS non è uguale al cono, che ha per base il cerchio ABCD, e per altezza la OV; si supponga pareggiare quell' altro cono ugualmente alto, che ha per base il cerchio *abcd* mi-

nore di ABCD, e concentrico. S' inscriva nel cerchio maggiore ABCD un poligono AEBFCD di un numero pari di lati uguali, nessun de' quali tocchi il cerchio minore *abcd*; e poi sopra un tal poligono s' intenda eretta la piramide inscritta nel cono proposto, che sarà perciò di uguale altezza all' altra PQRS; e quindi dovrà stare quella a questa, come il poligono AEBFCD al rettilineo PQR*, o al cerchio ABCD, * 6. XII. che si è supposto uguale a questo rettilineo: laonde siccome il poligono AEBFCD è minore del cerchio ABCD in cui è inscritto, dovrà anche la piramide, che ha per base il poligono AEBFCD e per vertice il punto V esser minore dell' altra PQRS, vale a dire del cono *abcd*V, il quale si è supposto uguale alla piramide PQRS. Lo che è impossibile; poichè la piramide AEBFCDV comprende un tal cono. Non può dunque la piramide PQRS pareggiare un cono dell' altezza OV, che abbia per base un cerchio minore del cerchio ABCD.

Si supponga in secondo luogo la piramide PQRS essere uguale ad un altro cono, che abbia la stess' altezza OV, e per base il cerchio GHKL maggiore di ABCD, e concentrico. S' inscriva pure in questo cerchio il poligono GMHNKL di un numero pari di lati uguali, alcun de' quali non tocchi l' altro cerchio ABCD; e su di questo poligono si concepisca eretta la piramide inscritta in quel cono. Ed essendo questa piramide uguale in altezza all' altra PQRS, sarà quella a questa, come la base GMHNKL alla base PQR*, cioè * 6. XII. al cerchio ABCD: quindi siccome il poligono GMHNKL è maggiore del cerchio ABCD; dovrà anche la piramide GMHNKLV esser maggiore dell' altra PQRS, o del cono GHKLV, al quale questa piramide si era supposta uguale. Ma ciò non può essere; poichè la piramide GMHNKLV è inscritta in questo cono. Adunque

la piramide PQRS nè anche può pareggiare un cono dell' altezza OV, che abbia per base il cerchio GHKL maggiore di ABCD. Si è poc' anzi dimostrato, che non poteva pareggiare un cono della medesima altezza, la cui base fosse il cerchio *abcd* minore di ABCD. Laonde una tal piramide dovrà pareggiare il cono ABCDV. C. B. D.

Cor. E perciò anche: *Ogni cilindro è uguale al prisma, che ha per base un rettilineo uguale alla base del cilindro, e per altezza quella di un tal solido.*

Poichè l' uno, e l' altro di questi solidi sono rispettivamente tripli del cono, e della piramide, che hanno le stesse loro basi, e l' altezza medesima.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se la base di un cono pareggi la superficie conica di un altro cono, e l' altezza di quello sia quanto la perpendicolare che dal centro della base di questo cade in un lato di esso; que' due coni saranno uguali.

fig. 71. Sieno i due coni ABLC, DEMF, ed il cono ABLC abbia in base BLC uguale alla superficie dell' altro cono DEMF, e l' altezza sua AG pareggi la perpendicolare HK, che dal centro della base del cono DEMF si abbassa sopra un suo lato DE: dico che questi due coni sieno uguali.

Poichè essendo la base del cono ABLC uguale alla superficie dell' altro DEMF; dovrà stare la base del cono ABLC a quella del cono DEMF, come la superficie di questo cono alla sua base*. Ma come quella superficie conica a questa base, così sta DE ad EH*,

*7. V.
*p. 12.

o pure DH ad HK, per esser simili i triangoli DEH, DHK*, o finalmente DH ad AG, che si è supposta pareggiare HK. Quindi come la base del cono ABLC a quella dell' altro DEMF, così sta l' altezza DH di questo all' altezza AG del primo; e perciò i coni ABC, DEF avendo le loro basi reciprocamente proporzionali alle altezze, saranno tra loro uguali *. C. B. D.

*8. VI.

*15. XII.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Ogni rombo conico è uguale al cono la cui base è un cerchio uguale alla superficie di uno de' coni, che compongono il rombo; e l' altezza è quanto quella perpendicolare, che si abbassa sopra uno de' lati di questo cono stesso dal vertice dell' altro cono.

Sia ABPCD un rombo conico, in cui il cerchio BPC sia la base comune de' coni che lo compongono, ed AD il suo asse; e si ponga il cono HGQK, che abbia la base GQK uguale alla superficie dell' un cono ABPC componente il rombo conico, e l'altezza HL quanto la perpendicolare DF, che dal vertice D dell' altro di questi coni DBPC si abbassa sopra il lato AB del cono ABPC: dico che il cono HGQK sia uguale al rombo conico ABPCD.

fig. 72

Si supponga un altro cono NMBX, che abbia la base MRX uguale al cerchio BPC del rombo conico, e l' altezza NO quanto la AD. E poichè il cono DBPC sta all' altro ABPC, come DE ad EA*, sarà, componendo, il rombo conico ABPCD al cono ABPC, come DA ad AE. Ma sta pure il cono NMRX al cono ABPC, come NO, o sia AD ad AE*. Adunque il rombo conico ABPCD, e 'l cono NMRX serbando al cono ABPC la stessa ragione, dovranno essere uguali tra loro *. Or

*14. XII.

*14. XII.

* 9. V.

essendosi supposta la base del cono HGQK uguale alla superficie dell' altro cono ABPC; dovrà stare la superficie di questo cono alla sua base, come la base del cono HGQK a quella del cono ABPC, o dell' altro NMRX. Ma la superficie del cono ABPC sta alla sua base, come AB a BE *, o pure come AD a DF, per esser simili i triangoli ABE, ADF, o finalmente come NO ad HL, le quali rette pareggiano rispettivamente le AD, DF. Adunque starà la base del cono HGQK a quella dell' altro NMRX, come l' altezza NO di questo all' altezza HL del primo; e perciò essi coni saranno uguali *. Laonde essendosi dimostrato il cono NMRK uguale al rombo conico ABPCD: anche un tal rombo conico sarà uguale al cono HGQK. C. B. D.

* p. 12.

* 15. XII.

COR. Si rileva dalla dimostrazione del precedente teorema, che due, o più coni i quali hanno la medesima base pareggiano un sol cono, che ha la base stessa, e per altezza la somma delle altezze loro.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se un cono si seghi con un piano parallelo alla base, e sul cerchio, che si ottiene da tal sezione s'intenda descritto quell' altro cono, che ha per vertice il centro della base del primo, e poi il rombo conico che si compie da que' due coni che hanno per base tal sezione si tolga dall' intero cono; il solido che rimane sarà uguale a quel cono la cui base è un cerchio uguale alla superficie conica, ch' è tra i piani paralleli, e l' altezza è quanto la perpendicolare, che dal centro della base del cono proposto si abbassa sopra un suo lato.

f. 73. Sia il cono ABGC, il quale si seghi con un piano parallelo alla base, che faccia la sezione DKE; ch' è

un cerchio *; e sopra questo cerchio s' intenda descritto * l' altro cono DKEF, il quale abbia per vertice il centro F della base del cono ABGC: dico che se dal cono ABGC si tolga il rombo conico ADKEF, il rimanente solido sia uguale al cono QIRL, la cui base è un cerchio uguale alla superficie conica, ch' è tra i piani paralleli DKE, BGC, e l' altezza è quanto la perpendicolare FH, che si abbassa dal centro F della base del cono ABGC sopra un suo lato AB.

* di p. 13.

Ponghansi i due altri coni NMSX, POTR tali, che la base del cono NMSX sia uguale alla superficie del cono ABGC, e l' altezza uguale alla FH; che perciò sarà un tal cono NMSX uguale all' altro ABGC *. Sia poi la base del cono POTR uguale alla superficie del cono ADKE, e l' altezza anche quanto la FH; sarà un tal cono POTR uguale al rombo conico ADKEF *. Or i tre coni QIRL, NMSX, POTR hanno la stess' altezza, e perciò sono nella ragione delle basi *; sarà dunque il cono NMSX uguale a' coni QIRL e POTR, siccome la base del primo è uguale alle basi di questi altri due. Laonde essendo il cono NMSX uguale al cono ABGC, e il cono POTR al rombo conico ADKEF; dovrà il rimanente cono QIRL essere uguale al solido che rimane togliendo il rombo conico ADKEF dal cono ABGC. C. B. D.

* p. 15.
* p. 16.
* 11. XII.

COR. Dalla precedente dimostrazione si rileva, che due, o più coni i quali hanno la medesima altezza pareggiano un sol cono dell' altezza stessa, che ha per base un cerchio uguale alla somma delle basi de' coni proposti.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se uno de' coni, che compongono un rombo conico si seghi con un piano parallelo alla base, e sul cerchio, ch' è la sezione in esso fatta, descrivasi il cono che ha lo stesso vertice dell' altro cono che fa parte del rombo conico; e che poi il rombo conico, che in tal modo si ottiene, si tolga dal proposto; il rimanente solido pareggerà un cono, la cui base è uguale alla superficie, ch' è tra i piani paralleli, e l' altezza è quanto la perpendicolare, che dal vertice dell' altro cono componente il rombo conico si abbassa sopra un lato del primo cono.

fig. 74. Sia il rombo conico BAGCD, e l' un de' coni BAGC, che lo compongono si seghi con un piano parallelo alla base, il quale faccia la sezione EQF, ch' è un cerchio, sul quale si descriva il cono, che ha per vertice il punto D; dovrà la differenza de' due rombi conici BAGCD, BEQFD pareggiare il cono KHSL, la cui base è uguale alla superficie conica, ch' è tra i piani paralleli AGC, EQF, e l' altezza è quanto la perpendicolare DH, che cade dal punto D sulla BA.

Si pongano i due altri coni NMVX, POTR, e sia la base del cono NMVX uguale alla superficie del cono BAGC, e l' altezza alla DH; che perciò un tal cono NMVX sarà uguale al rombo conico BAGCD*; sia poi la base del cono POTR uguale alla superficie del cono BEQF, e l'altezza quanto la stessa DG, il che renderà questo cono POTR uguale all'altro rombo conico BEQFD. E poichè la superficie del cono BAGC si compone dalla superficie del cono BEQF, e da quella, ch' è tra

* p. 16.

i piani paralleli EQG, AGC; e la superficie del cono BAGC è uguale alla base del cono NMVX, la superficie del cono BEQF è uguale alla base del cono POTR, e finalmente la superficie, ch'è tra i piani paralleli EQF, AGC, è uguale alla base del cono KHSL: perciò la base del cono NMVX è uguale alle basi de' coni POTR, KHSL. Laonde avendo questi coni anche la stess' altezza, sarà il cono NMVX uguale a' coni KHSL, POTR*. Ma il cono NMVX è uguale al rombo conico BAGCD, e 'l cono POTR all'altro rombo conico BEQFD. Quindi il rimanente solido, ch'è la differenza di que' due rombi conici, dovrà pareggiare il cono KHSL. C. B. D.

* c. p. 17.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se un arco di cerchio minore della semicirconferenza si divida in un qualunque numero di parti, e si tirino a queste le corde, e poi un tal arco insieme colle corde in esso tirate si rivolga dintorno al raggio, che passa per un de' suoi estremi; la superficie sferica descritta da tutto l' arco sarà maggiore della superficie, che si descrive da tutte quelle corde.

Sia l' arco di cerchio ADB minore della semicirconferenza ABC, ed esso sia diviso nelle parti AD, DE, EB, alle quali sien tirate le corde AD, DE, EB: dico che se si rivolgano l' arco, e le corde dintorno al raggio OA, che passa per uno degli estremi A dell'arco; la superficie sferica descritta dall'arco sia maggiore della superficie, che vien generata dalle corde AD DE, EB.

fig. 75.

Dall' altro estremo B dell' arco si abbassi sul raggio

OA la perpendicolare BF, la quale nel rivolgersi l'arco ADB intorno ad OA descriverà un cerchio. E poichè la superficie sferica descritta dall'arco ADB, e quell'altra, che si descrive dalle AD, DE, EB hanno per termine comune la circonferenza del cerchio descritto dalla BF, verso il quale sono concave, e che di più la prima superficie comprende la seconda; perciò sarà la superficie generata dall'arco ADB maggiore di quella, che si descrive dalle corde AD, DE, EB. C. B. D.

Cor. Dimostrando nel modo stesso, che la superficie sferica descritta dall'altro arco BGC, che vi resta per compiere la semicirconferenza ABC sia maggiore della superficie, che si descrive dalle corde delle parti in cui esso si divide; ne segue, che:

La superficie di una sfera è maggiore della superficie del solido, che si descrive da un qualunque rettilineo inscritto nel semicerchio generatore della sfera.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se ad un arco di cerchio minore della semicirconferenza si tirino in diversi punti le tangenti, le quali s'incontrino tra loro, e le estreme si arrestino a' raggi, che passano per gli termini dell'arco; e s'intendano rivolgersi dintorno ad uno di questi raggi l'arco, e le tangenti: la superficie sferica, che descrivesi dall'arco sarà minore di quella superficie, che descrivono le tangenti.

fig. 76. Sia l'arco circolare ADB minore della semicirconferenza, al quale ne' punti D, E, F si tirino le tangenti LG, GH, HK; e la prima, e l'ultima di queste incontrino in L, e K i raggi OA, OB tirati per

gli termini A, B dell'arco: dico che la superficie sferica, che descrivesi dall'arco ADB in rivolgersi dintorno al raggio AO sia minore della superficie, che si descrive in tal rivoluzione dalle tangenti LG, GH, HK.

Dall'estremo B dell'arco si abbassi sul raggio OA, intorno al quale un tal arco si soppone girare, la perpendicolare BN, e si tiri la BM tangente all'arco stesso. E poichè rivolgendosi dintorno ad AN sì l'arco ADB, che le tangenti LG, GH, HM, MB si vengono a descrivere due superficie, una dall'arco, e l'altra dalle tangenti, le quali superficie hanno per loro termine comune la circonferenza di quel cerchio, che si descrive dalla BN, e che di più la prima è compresa dalla seconda; perciò sarà quella minore di questa *. Or essendo BM tangente del cerchio, e perciò perpendicolare a EO, sarà MK maggiore di MB; ma è anche il punto K più distante dall'asse AO, che il punto B: adunque la superficie conica descritta da MK nella rivoluzione prescritta, è maggiore di quella, che si descrive da BM*. Aggiuntavi di comune la superficie che descrivono le LG, GH, HM; sarà l'intera superficie descritta dalle LG, GH, HK maggiore di quella, che si descrive dalle LG, GH, HM, MD; e perciò anche maggiore dalla superficie sferica descritta dall'arco ADB, della quale si era poc'anzi dimostrata maggiore quella, che descrivevano le tangenti AG, GH, HM, MB. C. B. D.

* pr. 4.

* p. 13.

Cor. Dimostrando similmente, che la superficie sferica descritta dall'altro arco BC, che rimane per compiere la semicirconferenza ABC, sia minore della superficie descritta dalle tangenti KP, PC; ne segue, che:

La superficie di una sfera è minore della superficie di quel solido, che si descrive da un qualunque rettilineo circonscritto al semicerchio, dal quale si genera la sfera.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Sieno due archi circolari, che abbiano per centro comune il vertice di quell' angolo, ch' essi sottendono, e l' arco esteriore si divida in modo, che le corde delle sue parti non tocchino l' arco interiore; la superficie generata da quelle corde rivolgendosi insieme coll' arco dintorno al raggio tirato per uno de' termini di questo, sarà maggiore della superficie sferica, che in tal rivoluzione si descrive dall' arco interiore.

fig. 77. Sieno ABH, DEF due archi circolari descritti dintorno allo stesso centro O, e tra i lati dello stesso angolo DOF; e l' arco esteriore DEF sia diviso nelle parti DE, EG, GF in modo, che le corde DE, EG, GF non tocchino l' arco interiore ABH* : dico, che se dintorno a DO si rivolgano gli archi e le corde, sia la superficie descritta dalle corde DE, EG, GF maggiore della superficie sferica, che descrivesi dall' arco ABH.

*s. 16. XII

Dal centro O si abbassino sulle DE, EG, GF le perpendicolari, e per gli punti B, K, L ove queste incontrano l' arco ABH, gli si tirino le tangenti MN, NP, PQ, che saranno rispettivamente parallele alle DE, EG, GF, e minori di queste corde; lo che si dimostra facilmente: ma sono anche i punti E, G, F più distanti dall' asse DO, che non lo sono gli altri N, P, Q; laonde le superficie coniche generate dalle DE, EG, GF nella prescritta rivoluzione, saranno rispettivamente maggiori delle altre generate dalle MN, NP, PQ* ; cioè l intera superficie descritta dalle corde DE, EG, GF sarà maggiore di quella, che de-

*pp. 12. 13.

scrivono le tangenti MN, NP, PQ; e quindi anche maggiore della superficie sferica descritta dall' arco ABH*. C. B. D.

* p. 20.

COR. Dimostrando similmente, che la superficie descritta dalle corde delle parti in cui si divide l' altro arco FRT, ch' è il complemento al semicerchio dell' arco DEF, sia maggiore della superficie sferica descritta dall' arco HSC complemento al semicerchio dell' arco ABH; ne segue, che:

Due cerchi essendo concentrici, la superficie di quel solido, che si genera da un rettilineo inscritto nel cerchio esteriore, il qual non tocca il cerchio interiore, sarà maggiore della superficie della sfera, che vien generata da questo cerchio.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se un arco di cerchio non maggiore del quadrante si divida in parti uguali, ed a queste parti si tirino le corde; la superficie descritta da queste corde, nel rivolgersi insiem coll' arco dintorno ad un raggio tirato per un di lui estremo, sarà uguale al rettangolo dell' altezza dell' arco nella circonferenza di quel cerchio, che ha per raggio la perpendicolare tirata sopra una di quelle corde dal centro dell' arco.

Sia ABD un arco di cerchio non maggiore del quadrante, il quale sia diviso nelle parti uguali AB, BE, ED, e sieno AB, BE, ED le corde, che le sottendono: dico che la superficie descritta da queste corde, nel rivolgersi insieme coll' arco ABD intorno al raggio OA tirato per un suo estremo A, sia uguale al rettangolo dell' altezza AH di esso arco nella circonferen-

fig. 78.

za, che ha per raggio la perpendicolare OP, che dal centro O dell'arco si abbassa sopra una di quelle corde AB.

Da' punti delle divisioni B, E si abbassino sul raggio immobile AO le perpendicolari BF, EG. E poichè nel rivolgersi il triangolo ABF rettangolo in F intorno al suo lato AF, l'altro lato AB descrive una superficie conica; sarà perciò la superficie descritta dalla AB uguale al triangolo rettangolo, che ha per lati dintorno all'angolo retto la AB stessa, e la circonferenza del raggio BF*, o sia al rettangolo della circonferenza di BF in BP metà di AB. Ma perchè sono simili i triangoli ABF, APO, sta, permutando, AF ad AP, come BF a PO, o come la circonferenza del raggio BF a quella del raggio PO*; quindi il rettangolo di BP nella circonferenza del raggio BF, dovendo pareggiar l'altro rettangolo di BF nella circonferenza del raggio PO, sarà anche questo uguale alla superficie conica descritta da AB. Or nel rivolgersi il trapezio EBFG intorno al lato FG, cui gli altri BF, EG sono perpendicolari, la EB descrive una porzione di superficie conica, ch'è tra i piani paralleli descritti dalle EG, BF, la quale è quanto il rettangolo contenuto dalla EB nella circonferenza del raggio KL, che dal punto K medio della BE si tira parallela alla BF*. E poichè, congiunta la OK, l'angolo OKB è retto, e quindi uguale a' due BKN, KBN; toltone di comune l'angolo BKN, resterà l'angolo KBN uguale all'altro LKO: perciò i due triangoli LKO, BKN, e quindi gli altri LKO, BEM saranno simili, e starà BE a BM, come KO a KL, o come la circonferenza del raggio KO a quella del raggio KL*. Laonde il rettangolo di BM, o FG nella circonferenza del raggio KO, o PO, sarà uguale a quello di BE nella circonferenza del raggio KL, cioè alla superficie conica descritta

* p. 11.

* s. p. 3.

* s. 1. p. 13.

* s. p. 3.

da BE. Per lo che essendosi dimostrata la superficie conica descritta da BA uguale al rettangolo di AF nella circonferenza di PO; sarà la superficie descritta dalle AB, BE uguale al rettangolo delle AF, FG, cioè di AG nella circonferenza del raggio OP. E così continuando a dimostrare per le altre superficie descritte dalle altre corde ED, ec.; si conchiuderà, che la superficie descritta da tutte esse sia uguale al rettengolo della circonferenza di OP in AH. C. B. D.

COR. Se l'arco AD fosse stato il quadrante; la superficie descritta dalle corde degli archi uguali in cui esso si sarebbe diviso avrebbe pareggiato il rettangolo della circonferenza del raggio OP nel raggio OA. E quindi se nell'altro quadrante del semicerchio ABC si fosse praticato lo stesso, se ne sarebbe concluso, che:

Dividendosi la semicirconferenza di un cerchio in un numero pari di parti uguali, e tirandosi la corda ad ognuna di queste: la superficie del solido, che vien descritto dal rettilineo che ne risulta rivolgendosi dintorno al diametro dovrà essere uguale al rettangolo di un tal diametro nella circonferenza, che ha per raggio la distanza di uno de' lati del rettilineo dal centro del semicerchio.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Se un arco non maggiore del quadrante si divida in parti uguali, e si tirino a queste le corde, e che poi s' intenda rivolgersi il rettilineo contenuto da queste corde, e da' raggi tirati per gli estremi dell' arco dintorno ad uno di questi raggi; il solido, che da un tal rettilineo si descrive, sarà uguale al cono, che ha per base un cerchio uguale alla superficie generata da quelle corde, e per altezza la perpendicolare, che dal centro dell' arco cade in una di esse.

fig. 79 Sia l' arco ABD non maggiore del quadrante, il qual si divida nelle parti uguali AB, BE, ED, ed a queste si tirino le corde: dico che il solido, che si descrive dal rettilineo ABEDO rivolgendosi dintorno al raggio AO, sia uguale al cono, che ha per base il cerchio uguale alla superficie descritta dalle AB, BE, ED, e per altezza la perpendicolare OP abbassata dal centro O dell' arco sopra una delle corde AB.

Si tirino i raggi OB, OE. Or il triangolo ABO rivolgendosi dintorno al suo lato AO descrive un rombo conico * uguale a quel cono, la cui base pareggia la superficie conica descritta da AB, e l' altezza è quanto la OP *: e se si prolunghi la EB in G, si vede chiaramente, che i due triangoli GEO, GBO, rivolgendosi dintorno alla GO, descrivono due rombi conici; che perciò il solido terminato dalla superficie conica descritta da EB, e da quelle, che descrivonsi dalle BO, EO, il quale è la differenza di que' due rombi conici, sarà uguale al cono, che ha la base uguale alla superficie conica descritta da EB, e per altezza la perpen-

* d. 3.
* p. 16.

dicolare OQ, che cade sulla EB dal centro O*, o ch' è lo stesso la OP. Adunque l' intero solido descritto dal quadrilineo ABEO sarà uguale a quel cono, la cui base è quanto la superficie descritta dalle AB, BE, e che ha per altezza la OP*. E così continuando a dimostrare, si conchiuderà essere tutt' il solido descritto dal rettilineo proposto ABEDO uguale al cono, la cui base è uguale alla superficie descritta dalle AB, BE, ED, ed OP n' è l' altezza.

* p.18.

* c.p.17.

Che se l' arco ABF fosse stato il quadrante; prolungando l' ultima delle corde FD fino ad incontrare il raggio OA in H; l' ultimo solido terminato dalla superficie cónica generata da DF, da quella che si descrive dalla OD, e dal cerchio descritto da OF, essendo la differenza del cono descritto dal triangolo FOH, e del rombo conico che descrivesi dall' altro triangolo ODH nel loro rivolgimento dintorno ad OH, dovrebbe pareggiare quel cono, la cui base è uguale alla superficie conica descritta da FD, ed OR, o sia OP n' è l' altezza *: che perciò aggiugnendo questo solido a quello descritto dal rettilineo ABEDO, risulterà il solido inscritto nell' emisfero, che vien generato dal quadrante circolare ABFO rivolgendosi dintorno al raggio AO, uguale al cono la cui base pareggia la superficie di un tal solido, e l' altezza è quanto la OP.

* p. 12.

Cor. Dimostrandosi lo stesso per lo solido descritto da un altro rettilineo identico, il qual s' inscriva nell' altro quadrante OFC; ne segue, che:

Dividendosi la semicirconferenza di un cerchio in un numero pari di parti uguali, e tirandosi la corda ad ognuna di queste; il solido che vien descritto dal rettilineo che ne risulta rivolgendosi dintorno al diametro pareggerà quel cono la cui base è uguale alla superficie di questo solido, e l' altezza è quanto la perpendicolare,

che dal centro del semicerchio cade sopra un lato del semipoligono.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

La superficie di una sfera è uguale al rettangolo contenuto da una linea retta, che rappresenta la circonferenza del suo cerchio generatore, e dal diametro di questo stesso cerchio.

fig. 80. *n.* 1. Sia ABC quel semicerchio, che genera una sfera, ed AC il suo diametro; ed il rettangolo ZY sia contenuto dalla XY, la quale rappresenti la circonferenza del diametro AC, e dalla XZ, che pareggia un tal diametro: dico che questo rettangolo sia uguale alla superficie della sfera, che quel semicerchio descrive.

Imperciocchè se il rettangolo ZY non è uguale alla superficie della sfera, che si descrive dal semicerchio ABC, dovrà pareggiare la superficie di un'altra sfera descritta da un semicerchio minore di ABC, o pur maggiore. Pareggi in primo luogo quella della sfera, che si descrive dal semicerchio *abc* minore di ABC, e concentrico. Si divida continuamente per metà la semicirconferenza esteriore ABC, finchè le corde de' suoi archi AG, GB, BH, HC non tocchino la semicirconferenza interiore *abc**; e dal centro O sopra una di tali corde GA si abbassi la perpendicolare OP: sarà questa OP minore del raggio OA; e perciò la circonferenza del raggio OP sarà minore della circonferenza del raggio OA*, cioè della XY. Si tagli dunque dalla XY la X*y* uguale alla circonferenza del raggio OP, e si compia il rettangolo ZY; sarà un tal rettangolo uguale alla superficie di quel solido, che si descrive dal semipo-

*16.XII.

**s p.* 3.

ligono AGBHC inscritto nel semicerchio ABC*. Ma la superficie di questo solido è maggiore di quella della sfera descritta dal semicerchio *abc* *, e che si è supposto pareggiare i rettangolo ZY: adunque sarebbe il rettangolo Zy maggiore dell' altro ZY. Lo che ripugna. E perciò il rettangolo ZY non può essere uguale alla superficie di una sfera descritta dal semicerchio *abc* minore di ABC.

*c.p.22. *c.p.21.

Suppongasi dunque questo rettangolo ZY essere uguale alla superficie di un' altra sfera descritta dal semicerchio DEF maggiore di ABC, e concentrico. Si divida un tal semicerchio DEF continuamente per metà, finchè le corde de' suoi archi DK, KE, EL, LF non tocchino la semicirconferenza interiore ABC*; e si abbassi dal centro O sopra una di tali corde DK la perpendicolare OQ: sarà questa OQ maggiore del raggio OA; e perciò la circonferenza del raggio OQ sarà maggiore di quella del raggio OA*, cioè della XY. Laonde si prolunghi la XY in T, finchè XT pareggi la circonferenza del raggio OQ, e la XZ si prolunghi anche in R, in modo che la XR sia uguale al diametro FD di quest' altro semicerchio DEF; e si compia il rettangolo RT: sarà questo rettangolo uguale alla superficie del solido, che si descrive dal semipoligono DKELF*. Ma la superficie di questo solido è minore di quella della sfera generata dal semicerchio DEF, nel quale quel poligono viene ad essere inscritto*. Adunque anche il rettangolo RT, ch' è uguale alla superficie di quel solido, dovrà esser minore del rettangolo ZY, che si suppone pareggiare quella della sfera. Lo che ripugna. Quindi il rettangolo ZY non può essere uguale alla superficie di una sfera descritta da un semicerchio maggiore di ABC. Si è dimostrato, che nè anche poteva essere quanto quella di una sfera descritta da un semicerchio minore di ABC. Adunque

*16.XII. *s.p.3. *c.p.22. *c.p.19.

dovrà un tal rettangolo ZY essere uguale alla superficie della sfera, che si descrive dal semicerchio ABC. C. B. D.

SCOLIO.

fig. 67. La linea retta AB rappresenti la circonferenza del cerchio generatore di una sfera, e l'altra linea retta AC applicata perpendicolarmente alla AB nell'estremo A, sia il diametro di un tal cerchio, e si compia il rettangolo CB; sarà questo uguale alla superficie di una tale sfera *. Or se si prolunghi la AC in D, finchè la AD sia doppia della C, e quindi quadrupla di AE metà di AC, e perciò uguale al raggio del cerchio generatore della sfera; congiunte le BD, BE, il triangolo DAB essendo uguale al rettangolo CB, sarà quanto la superficie sferica generata dal cerchio del raggio AE*; e l'altro triangolo EAB dinoterà un tal cerchio*. Laonde la superficie sferica starà al suo cerchio generatore, come il triangolo DAB all'altro EAB; cioè come DA ad AE*, e quindi come 4 ad 1. Vale a dire che

La superficie di una sfera è quadrupla del suo cerchio generatore.

E volendo esibire un solo cerchio uguale alla superficie di una sfera, sarà questo il cerchio, che ha per raggio il diametro del cerchio generatore della sfera; poichè quel cerchio è quadruplo, di questo, dall'essere il quadrato del raggio di quello quadruplo del quadrato del raggio di questo*.

* p. 24.
* p. 24.
* p. 3.
* 1. VI.
* 2. XII.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Ogni sfera è uguale al cono, che ha per base il cerchio uguale alla superficie della sfera, e per altezza il raggio di questa.

Sia ABC quel semicerchio, che genera la sfera, ed OA il suo raggio: ed il cono ZXRY abbia per base il cerchio XRY uguale alla superficie della sfera, che da un tal semicerchio si descrive, e la sua altezza ZM sia quanto il raggio OA: dico che questo cono pareggi quella sfera. *fig.* 80. *n.* 2.

Imperocchè se il cono ZXRY non è uguale alla sfera, che si descrive dal semicerchio ABC; dovrà pareggiare una sfera, la qual si descriva da un semicerchio minore di ABC, o pur maggiore. Si supponga in primo luogo uguale a quella sfera, che descrivesi dal semicerchio *abc* minore di ABC, e concentrico. Si divida continuamente per metà la semicirconferenza esteriore ABC, finchè le corde de' suoi archi AG, GB, BH, HC non tocchino la semicirconferenza intériore *abc*; e dal centro O si abbassi sopra una di queste corde AG la perpendicolare OP. Or poichè la superficie del solido, che si descrive dal semipoligono AGBHC rivolgendosi dintorno ad AC è minore della superficie della sfera, che vien descritta dal semicerchio ABC; e questa si è supposto pareggiare il cerchio XRY; dovrà perciò quella superficie essere quanto un cerchio minore di XRY. Sia questo il cerchio *xry*, che si supponga concentrico all'altro XRY, e su di esso s'intenda descritto il cono *zxry*, che abbia per altezza la *z*M uguale alla OP, ch'è minore di OA, e

quindi di MZ; sarà un tal cono uguale al solido generato dal semipoligono AGBHC*. Ma questo solido è maggiore della sfera, che si descrive dal semicerchio *abc*: adunque dovrebbe anche il cono *zxry* esser maggiore dell' altro ZXRY. Lo che ripugna. Non può dunque il cono ZXRY essere uguale ad una sfera, la quale sia descritta da un semicerchio minore di ABC.

*e p.23.

Si supponga perciò, ch' esso cono possa pareggiare la sfera, che si descrive da un semicerchio maggiore di ABC; e sia questo il semicerchio DEF concentrico ad ABC. Si divida anche la semicirconferenza esteriore DEF continuamente per metà, finchè gli archi DK, KE, EL, LF sieno tali, che le loro corde non tocchino la semicirconferenza interiore ABC, e sopra una di tali corde DK si abbassi la perpendicolare OQ. E poichè la superficie del solido, che si genera dalla rivoluzione del semipoligono DKELF dintorno alla DF, è maggiore della superficie della sfera, che si descrive dal semicerchio ABC*: perciò dovrà la superficie di quel solido esser uguale ad un cerchio maggiore del cerchio XRY: sia questo il cerchio SVT descritto dintorno allo stesso centro M di quello, e su di un tal cerchio s' intenda eretto quel cono, che ha per altezza la NM uguale alla OQ, ch' è maggiore della OA, e quindi della MZ; sarà un tal cono uguale a quel solido*. Laonde siccome quel solido è minore della sfera, che si descrive dal semicerchio DEF nella quale è inscritto; così sarà pure il cono NSVT minore dell' altro ZXRY. Lo che anche ripugna. E perciò non può il cono ZXRY pareggiare la sfera, che si descrive da un semicerchio maggiore di ABC. Ma si è poc'anzi dimostrato, chè questo cono nè pure poteva pareggiare una sfera, la quale si descrivesse da un semicerchio minore di ABC. Adunque dovrà esser quanto la sfera, che da un tal semicerchio si descrive. C. B. D.

*e.p.21.

*e.p.23.

SCOLIO.

Essendo la superficie di una sfera quadrupla del suo cerchio generatore* : ed i due coni uno che abbia per base la superficie sferica, l'altro il cerchio generatore di essa, e per altezza comune il raggio, dovendo esser tra loro come le basi* ; sarà il primo quadruplo del secondo. Ma si è dimostrato, che il primo sia uguale alla sfera. Adunque

Ogni sfera è quadrupla di quel cono, che ha per base il cerchio generatore della sfera, e per altezza il raggio di questo.

* s. p. 24.
* 11. XII.

PROPOSIZIONE XXVI.

PROBLEMA.

Ogni cilindro che abbia la base uguale al cerchio generatore di una sfera, e per altezza il diametro di questo, è sesquialtero della sfera : e la di lui superficie insieme con le basi, è ancora sesquialtera della superficie della sfera.

N. B. Una grandezza si dice *sesquialtera* di un' altra, se questa accresciuta della sua metà pareggi la prima.

Imperocchè il cilindro, che abbiamo detto, essendo triplo di quel cono, che ha la stessa base sua, e l'altezza medesima*, dovrà esser sestuplo di quell' altro cono, che ha la medesima base, e per altezza il raggio della sfera* : si è poi dimostrata la sfera quadrupla di quest' ultimo cono*; è chiaro dunque, che il cilindro sia sesquialtero della sfera.

* 10. XII.
* 14. XII.
* s. p. 25.

Di nuovo, poichè la superficie di un tal cilindro

sta alla base, come il doppio del lato del cilindro al raggio di essa base*: ed è il lato del cilindro proposto uguale al diametro della sua base; quindi il doppio del lato sarà quadruplo del raggio della base; e perciò anche la superficie cilindrica sarà quadrupla della base. Laonde se ad una tal superficie si aggiungano le due basi; sarà la superficie cilindrica insieme con le due basi sestupla di una di queste, cioè del cerchio generatore della sfera. Ma si è dimostrato, che la superficie della sfera è quadrupla di questo stesso cerchio*; quindi tutta la superficie cilindrica è sesquialtera di quella della sfera. C. B. D.

* p. 10.

* s. p. 24.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

La superficie di un segmento sferico è uguale al rettangolo contenuto da una linea retta, che rappresenta la circonferenza del cerchio generatore dell' intera sfera, e dall' altezza di quell' arco di questo cerchio, dal quale si descrive la superficie del proposto segmento.

fig. 81. n. 1.

Sia ABC il semicerchio, che genera una sfera, ed abbassata da un qualunque punto B della semicirconferenza ABC la perpendicolare BH sul diametro AC, dinoti AEBH quel semisegmento circolare, dal quale si descrive un segmento sferico: inoltre il rettangolo ZY sia contenuto dalla XY uguale alla circonferenza del cerchio, che ha per raggio OA, e dalla XZ uguale alla AH altezza dell' arco AB: dico che tal rettangolo ZY pareggi la superficie del segmento sferico descritto da AEBH.

Poichè se questo rettangolo non è uguale alla superficie di un tal segmento sferico, il qual si supponga

minore della mezza sfera; dovrà pareggiare la superficie di un segmento sferico, la quale si descriva da un arco circolare maggiore di AEB, o pur minore, e che si potrà supporre sottendere quello stesso angolo AOB, ch' era sotteso dall' arco AEB. Suppongasi in primo luogo uguale ad una superficie sferica generata dall'arco *aeb* minore di AEB, descritto come si è detto. Si divida continuamente per metà l'arco AEB, finchè le corde degli archi, in cui resta diviso, non tocchino l'altro arco *aeb**; *s.16.XII e sopra una di tali corde AE si abbassi la perpendicolare OP, che sarà minore di OA, e quindi di XZ; che perciò anche la circonferenza del raggio OP sarà minore di quella del raggio OA*, cioè della linea ret- *s.p. 3. ta XY. Laonde si tagli dalla XY la X*y* uguale alla circonferenza del raggio OP, e si compia il rettangolo Z*y*, il quale sarà quanto la superficie, che si descrive dalle corde AE, EB, nel rivolgersi insieme con l'arco AEB dintorno ad AO*. Or una tal superficie è * p. 22. maggiore della superficie sferica, che si descrive dall' arco circolare *aeb**: quindi anche il rettangolo Z*y* * p. 24. dovrà esser maggiore dell'altro ZY. Lo che non può essere. E perciò non può il rettangolo ZY pareggiare la superficie sferica descritta da un arco circolare minore di AEB.

Sia perciò un tal rettangolo uguale a quella superficie sferica, che vien generata da un altro arco circolare DFG maggiore di AEB, e descritto come nel principio di questa dimostrazione si è detto. Si divida pure un tal arco continuamente per metà, finchè le corde DF, FG delle parti in cui si è esso diviso non tocchino l'altro arco AEB*, e si abbassi dal cen- *s.16.XII tro O comune a questi due archi la perpendicolare OQ sopra una di quelle corde DF; sarà OQ maggiore di OA, e perciò la circonferenza del raggio OQ sarà anche maggiore di quella del raggio OA*, cioè di * p. 3.

XY. Laonde si prolunghi XY in T, finchè XT sia uguale alla circonferenza del raggio OQ; e prolungata anche la XZ in R, sicchè XR pareggi DH altezza dell' arco DFG, si compia il rettangolo RT, il quale sarà uguale alla superficie, che si descrive dalle corde DF, FG rivolgendosi insieme con l' arco DFG dintorno al raggio DO*. Ma una tal superficie è minore di quella, che in questa rivoluzione si descrive dall' arco DFG*: adunque dovrà pure il rettangolo RT esser minore del rettangolo ZY. La qual cosa è impossibile. E perciò non può il rettangolo ZY essere uguale alla superficie sferica, che si descrive da un arco maggiore dell' arco AEB: si è anche dimostrato, che non poteva un tal rettangolo pareggiare la superficie sferica, che si descriverebbe da un arco minore di AEB. Laonde dovrà esser quanto quella, che si descrive dall' arco AEB.

* p. 22.
* pr. 4.

Che se il segmento sferico fosse stato maggiore della mezza sfera, cioè quello, che vien descritto dal semisegmento circolare CBH maggiore del quadrante: poichè la sua superficie è la differenza della superficie della sfera, e di quella dell' altro segmento sferico generato dal semisegmento circolare AEBH, ch' è minore del quadrante; e quindi quanto la differenza de' due rettangoli, che hanno per base comune la circonferenza del raggio OA, e per altezze le CA, ed HA respettivamente; perciò anche la superficie di quel segmento sferico maggiore della mezza sfera sarà uguale al rettangolo della circonferenza del raggio OA in CH altezza dell' arco CBH. C. B. D.

Cor. Paragonando adesso il rettangolo della circonferenza del raggio OA in AC, il qual pareggia la superficie sferica descritta dalla semicirconferenza ABC*, al rettangolo della circonferenza dello stesso raggio OA in AH, il quale è quanto la porzione di superficie

* p. 24.

sferica descritta dall' arco circolare AEB* ; si vede chiaramente, che avendo questi rettangoli per base comune il cerchio del raggio OA debbano esser tra loro come le altezze, cioè come CA ad HA. Val quanto dire, che : * p. 27.

La superficie di una sfera sta a quella di un suo segmento, come il diametro della sfera all' altezza del segmento.

SCOLIO.

Sia AC il diametro di una sfera, ed ABC il semicerchio generatore di essa : sia poi AE l' altezza di un suo segmento sferico, cioè di quello, che si descrive dal semisegmento circolare ABE ; sarà la superficie di una tale sfera all' altra di quel segmento sferico, come CA ad AE*, cioè come il quadrato di CA a quello di AB* ; o finalmente come il cerchio del raggio CA a quello del raggio AB*. Per lo che essendosi dimostrato il cerchio del raggio CA uguale alla superficie della sfera, che descrivesi dal semicerchio ABC* ; sarà anche la superficie del segmento sferico descritto dal semisegmento circolare ABE uguale al cerchio del raggio AB. Ma nel descriversi il segmento sferico dal semisegmento circolare ABE, l' estremo B della AB descrive il cerchio, ch' è base di un tal segmento sferico. Laonde. fig. 81. *c.prec. * c. 2. 20. VI. * 2.XII. *s.p.24.

La superficie di un segmento sferico è uguale a quel cerchio il cui raggio è la linea retta, che si tira dal vertice del segmento ad un qualunque punto della circonferenza dalle base di sso.

PROPOPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Ogni settore sferico è uguale a quel cono, che ha per base il cerchio, il qual pareggia la superficie sferica, che termina il settore, e per altezza il raggio della sfera.

fig. 81. n. 2. Sia AEBO quel settore circolare, che rivolgendosi dintorno al raggio OA descrive il settore sferico; ed il cono ZXRY abbia la sua base XRY uguale alla superficie sferica generata in tal rivoluzione dall' arco AEB, cioè, al cerchio del raggio AB*, e per altezza la ZM uguale ad OA: dico che questo cono sia quanto quel settore sferico.

*a p.27.

Imperocchè se non è il cono ZXRY uguale al settore sferico, che vien descritto dal settore circolare AEBO, il quale si supponga per ora minore del quadrante, sarà quanto un altro settore sferico maggiore di quello, che descrivesi dal settore circolare AEBO, o pur minore. Sia primieramente minore, e suppongasi perciò uguale a quell' altro settore sferico, che si descrive dal settore circolare *aeb*O minore di AEBO, e costituito con questo nello stesso angolo AOB Si divida continuamente per metà l' arco esteriore AEB, finchè le corde AE, EB delle sue parti non tocchino l' arco interiore *aeb* *; e poi s' intenda rivolgersi il rettilineo AEBO insieme col settore circolare AEBO dintorno al raggio OA. E poichè la superficie, che in tal rivoluzione si descrive dalle AE, EB è minore di quella, che descrivesi dall' arco AEB*; perciò quella superficie sarà rappresentata da un cerchio minore del cerchio XRY, che pareggia questa: sia questo il cerchio

*3.16.XII

*p. 19.

xry concentrico ad XRY, e su di esso si descriva il cono dell'altezza Mz uguale ad OP, ch'è minore di OA, e quindi anche di MZ; sarà un tal cono uguale al solido, che si descrive dal rettilineo AEBO*, e perciò maggiore del settore sferico generato dal settore circolare aebO, o sia del cono ZXRY, che si era supposto pareggiare questo settore. Lo che è impossibile. Adunque il cono ZXRY non è minor del settore sferico, che si descrive dal settore circolare AEBO. * p. 23.

Sia perciò maggiore di esso, e quindi uguale a quel settore sferico, il quale vien generato dal settore circolare DFGO maggiore dell'altro AEBO, e costituito nello stesso angolo AOB. Si divida continuamente per metà l'arco DFG, finchè le corde delle sue parti DF, FG non tocchino l'altro arco AEB; e poi s'intenda rivolgersi il rettilineo DFGO dintorno ad OD; sarà la superficie, che si descrive dalle DF, FG maggiore della superficie sferica, che vien generata dall'arco AEB*: perciò quella tal superficie sarà rappresentata da un cerchio SYT maggiore dell'altro XRY, con cui suppongasi concentrico, e su di esso s'intenda descritto quel cono, che ha l'altezza MN uguale alla perpendicolare OQ, che dal centro O dell'arco DFG si abbassa sopra una di quelle corde DF. E poichè un tal cono è quanto il solido generato da rettilineo DFGO*; sarà esso cono minore del settore sferico, che descrivesi dal settore circolare DFGO, e quindi dell'altro cono ZXRY, che si è supposto pareggiare un tal settore sferico Lo che è impossibile. Laonde nè pur può il cono ZXRY esser maggiore del settore sferico generato dal settore circolare AEBO: si è poi dimostrato, che non poteva esserne minore. Adunque gli dovrà essere uguale. * p. 22. * p. 23.

Che se il settore sferico proposto fosse stato descritto dal settore circolare BCO maggiore del quadrante: es-

sendo un tal settore sferico la differenza della sfera, e dell' altro settore di questa, che si descrive dal settore circolare AEBO minore del quadrante; sarà perciò quanto la differenza di que' coni, che pareggiano questi solidi; e quindi quanto il cono, che ha per base la superficie sferica descritta dall' arco BC, e per altezza la OA. C. B. D.

Cor. Essendo la sfera, ed un suo settore rispettivamente uguali a due coni, uno, che ha per base un cerchio uguale alle superficie sferica, e per altezza il raggio*, e l' altro, che ha per base quel cerchio, che pareggia la superficie sferica, che termina il settore, e la stess' altezza*; saranno perciò que'due solidi, come questi due coni, e quindi come le loro basi*, cioè come la superficie della sfera alla superficie della porzione sferica, che termina il settore; o finalmente come il diametro della sfera all' altezza di una tal porzione sferica*.

* p. 25.
* p. 28.
* 11.XII.
* c.p.27.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Ogni segmento sferico è uguale al cono, che tien per base quel cerchio, il cui raggio è l' altezza di esso segmento, e per asse la rimanente porzione del diametro accresciuta del raggio.

fig. 82.

Rappresenti ABC il semicerchio generatore di una sfera, ed ABE sia quel semisegmento circolare dalla cui rivoluzione dintorno ad AE si genera il segmento sferico: dico che questo segmento sferico sia uguale al cono, che ha per base quel cerchio il cui raggio è l' altezza AE di esso segmento, e per la rimanente parte EC del diametro accresciuta del raggio OA.

Imperciocchè essendo il quadrato di AB uguale a' quadrati delle AE, EB, anche il cerchio del raggio AB dovrà pareggiare i cerchi, che hanno per raggi le AE, EB; e perciò il cono, che ha per base il cerchio del raggio AB, e per altezza la AO, cioè il settore sferico generato dal settore circolare ABO*, dovrà essere uguale a' due coni che hanno per basi i cerchi de' raggi AE, EB, e per altezza la medesima AO*: tolto di comune il cono la cui base è il cerchio del raggio BE, ed EO n'è l'altezza, cioè quello, che si descrive dal triangolo BEO rivolto dintorno ad EO, o pure aggiugnendolo di comune, secondo che il settore circolare ABO è minore del quadrante, o pur maggiore; sarà il segmento sferico descritto da ABE uguale a' due coni, de' quali uno ha per base il cerchio del raggio AE, e per altezza AO, e l'altro ha per base il cerchio del raggio BE, e per altezza AE*. Or poichè AE sta ad EB, come EB ad EC; sarà AE ad EC, come il quadrato di AE a quello di EB*, o come il cerchio del raggio AE a quello del raggio EB*: e perciò il cono, che ha per base il cerchio del raggio AE, e per altezza EC, è uguale all'altro la cui base è il cerchio del raggio BE, ed AE n'è l'altezza*. Laonde sostituendo questo cono a quello, sarà il segmento sferico generato da ABE uguale a' due coni, de' quali ciascuno ha per base il cerchio del raggio AE, ed uno di essi ha per altezza AO, l'altro EC; e quindi ad un sol cono, che ha per base quel cerchio, e per altezza le EC, ed AO prese insieme*. C. B. D.

* p. 28.
* c.p. 17.
* c.p. 16.
* c. 2. 20. VI.
* 2. XII.
* 15. XII.
* c.p. 16.

SCOLIO.

In ordine a CE, ch'è l'altezza di uno de' segmenti in cui resta divisa una sfera, alla stessa CE insieme con CO raggio di essa sfera, e ad EA altezza dell'al-

tro segmento sferico si ritrovi la quarta proporzionale M; sarà, permutando, CE ad EA, come EC insieme con CO ad M, e quindi come quel cono, che ha per base il cerchio del raggio EA, e per altezza EC insieme con CO, all' altro cono della stessa base, e che ha M per altezza. Ma questo cono sta poi a quello, che ha per base il cerchio del raggio BE, e per altezza M, come il cerchio del raggio EA a quello del raggio EB*, cioè come EA ad EC. Adunque, per ugualità ordinata, starà il cono la cui base è il cerchio del raggio EA, ed EC insieme con CO n' è l' altezza, al cono che ha per base il cerchio del raggio BE, ed M per altezza, come CE ad EC, cioè in ragion d' ugualianza. Che perciò siccome quel primo cono si è dimostrato uguale al segmento sferico, che si descrive dal semisegmento circolare ABE*; così a questo segmento stesso sarà pure uguale l' altro cono, che ha per base il cerchio del raggio BE, ed M per altezza. Adunque:

*11. XII.

*p. 29.

Ogni segmento sferico è uguale a quel cono, che ha la stessa base del segmento, e per altezza la quarta proporzionale in ordine all' altezza dell' altro segmento a questa stessa accresciuta del raggio della sfera, ed all' altezza del segmento proposto.

FINE.

LA

MISURA

DEL

CERCHIO

NAPOLI

PREFAZIONE.

Il cerchio, ch' è dopo le figure rettilinee la più semplice, era naturale che dovesse muover subito dopo queste la curiosità de' Geometri in cercarne la misura. Sapendo già essi, che l'aja di un poligono regolare inscritto in un cerchio era uguale al rettangolo del suo perimetro nella metà della distanza di uno de' suoi lati dal centro del cerchio in cui era inscritto; passando dai poligoni inscritti al cerchio stesso, non dovettero stentar molto a dimostrare, che il cerchio era quanto il rattangolo della sua circonferenza nella metà del raggio; e quindi a ridurre il Problema della quadratura del cerchio a quello della rettificazione della circonferenza.

Tra i molti tentativi, che furon fatti per la rettificazione della circonferenza, il primo di cui ci sia pervenuta notizia è quello di Dinostrato, fratello del Geometra Menecmo particolar discepolo di Platone. Egli si valse in questa ricerca di una curva, che per la proprietà che aveva di quadrare il cerchio, fu chiamata *Quadratrice*; e forse perchè Dinostrato fu il primo a ravvisarvela, fu perciò detta di Dinostrato. E di una tal curva si valsero anche a quest' oggetto Nicomede, e molti altri geometri della Scuola Platonica. Ma questa maniera di

quadrare il cerchio fu ben presto riconosciuta come poco soddisfacente, e poco geometrica; mentre per la genesi di una tal curva si esigeva un certo moto, ed una determinata velocità di un punto; la quale non poteva esibirsi senza prima ammettere la rettificazione della circonferenza: e volendo ottener tal curva geometricamente bisognava ricorrere a quei luoghi, che gli antichi dicevano alla superficie, o pur descriverla per mezzo di una linea spirale descritta in un piano: e l'una, e l'altra di queste considerazioni era molto vaga, e poco conducente alla vera soluzione del Problema. Esse non erano però dispregevoli, nè lo sono tuttavia, avendo dato luogo alla scoperta di una proprietà importante della quadratrice. In generale gli sforzi, ed i tentativi di un vero geometra, se non lo fanno riuscire in quello, che cerca, non sono però mai perduti, ed infruttuosi.

Il Problema della quadratura del cerchio era dunque ai tempi di Archimede ancora tra le cose desiderate da' Geometri; ed è perciò che quest' uomo sommo, dotato di un ingegno fatto per eseguire tutto ciò, ch' era nuovo, ed arduo, avendo intrapreso a risolverlo, diede il primo, con una destrezza singolarissima per quei tempi, un approssimante rapporto del diametro alla circonferenza, e del cerchio al quadrato circonscritto ad esso. Il primo di tali rapporti, del quale molti si valgono in pratica, anche a' dì nostri, perchè proposto in termini ristrettissimi, è quello di 7 a 22; e l'altro, che deducesi facilmente dal primo, è quello di 11 a 14. Non vi mancarono però, anche in quei tempi felici per la

Geometria, molti, che pretesero di aver ritrovata in diversi modi l' esatta quadratura del cerchio. Ed i loro paralogistici ragionamenti, che non ci sono per buona fortuna pervenuti, possono scusare alquanto i tempi nostri, nei quali di questi falsi quadratori, appena iniziati nella Geometria, spesso spesso se ne schiudono.

Chi desidera una completa, ed insieme dilettevol notizia delle varie ricerche sulla quadratura del cerchio potrà leggere specialmente un' Operetta del Signor Montucla, intitolata: *Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle*. Per me basta solamente l' avvertire, che dal Wallis in poi, tutti i sommi Geometri Moderni, tra i quali il Newton, il Leibnitz, Giacomo Gregory, ed Huyghens, si sono occupati ad escogitare metodi ingegnosissimi, per approssimare nella maniera più grande possibile la circonferenza del cerchio: e che Lagny portò quest' approssimazione sino a farla differire dalla vera circonferenza per meno di un fratto, il cui numeratore fosse l' unità, ed il denominatore un numero composto di 128. cifre decimali; in modo tale che, come si esprime il Signor Montucla, l' errore su di un cerchio del diametro cento milioni di volte maggiore di quello della sfera delle stelle fisse, supponendo la parallasse dell' orbe terrestre solamente di un secondo, sarebbe più bilioni di bilioni di volte minore del diametro di un capello. Approssimazione, che spaventa, e della quale non avendosene alcun bisogno in pratica, non serve ad altro, che a provare l' estrema pazienza del geometra, che se n' era occu-

pato, e l'attività del metodo, che glie l'aveva fatta ottenere. Contuttociò l'Eulero ha mostrato co' suoi metodi, che l'approssimazione del Lagny poteva spingersi anche più oltre, ed ottenersi con artifizj di calcolo più attivi. E ciò è sufficiente a far conoscere con quanto poco buon senso tanti a giorni nostri perdono inutilmente il loro tempo in paralogistiche ricerche sul Problema della quadratura del cerchio.

Senza però ricorrere a' Metodi proposti da' sommi Analisti Moderni, i quali implicano ricerche sulle serie, mi sono attenuto in questo Libro della *Misura del Cerchio* al metodo di Giacomo Gregory, ricavato da soli principj di Geometria, e condotto a fine con ovviissime operazioni aritmetiche; poichè un tal metodo è molto semplice, e facile, e dà un' approssimazione per gli usi più che sufficiente, ed esatta.

LA MISURA

DEL

CERCHIO

DEFINIZIONI.

1. Una figura curvilinea si dirà essersi *quadrata*, se ella per mezzo di una geometrica construzione è stata trasformata in un' altra rettilinea.

Poichè a quest' ultima figura può sempre esibirsi un quadrato uguale*.

* 14. II.

2. E si dirà *rettificata* una curva, se con geometriche operazioni si rinvenga una linea retta, che la pareggi.

Scolio.

La quadratura di uno spazio curvilineo è o *esatta*, o per *approssimazione*. Si dice esatta, allorchè la figura rettilinea pareggia lo spazio curvilineo a rigor geometrico, e senza averne trascurata veruna, abbenchè minima, quantità; ed è per approssimazione quando si rinviene una figura rettilinea, che differisca dallo spazio curvilineo per una quantità piccolissima, e per conseguenza trascurabile. E lo stesso deve dirsi convenevolmente per la rettificazione di una curva.

LEMMA I.

Ogni poligono di un numero pari di lati uguali inscritto in un cerchio, è medio proporzionale tra quell' altro poligono regolare inscritto nel cerchio stesso, che ha la metà di lati, ed il poligono circonscritto simile a questo.

fig. 83. Sia DB il lato di un poligono, di un numero pari di lati uguali inscritto nel cerchio DBE; e da un estremo D dell' arco DB si abbassi sul raggio OB, che passa per l' altro estremo, la perpendicolare DF, la quale si prolunghi sino alla circonferenza in E, sarà l' arco BE uguale all' arco BD; e quindi la DE dinoterà il lato di quel poligono regolare inscrittibile nel cerchio DBE, che ha la metà di lati del già inscritto. Finalmente per lo punto B si tiri a tal cerchio la tangente ABC, la quale si arresti ai raggi OD, OE, che passano per gli estremi dell' arco DBE; sarà questo il lato del poligono circonscrittibile al cerchio DBE, simile all' inscrittibile del lato DE (*). Or io dico, che i poligoni i quali hanno per loro lati le DE, DB, AC sieno continuamente proporzionali.

E poichè i triangoli DFO, ABO sono rispettivamente uguali agli altri OFE, OBC; perciò saranno essi triangoli DFO, ABO le metà degli altri DOE, AOC. Laonde dividendosi i poligoni, che hanno per lati le DE, AC in tanti triangoli, come DOE, AOC, quanti sono i loro lati; si divideranno per conseguenza in tanti triangoli, come DFO, ABO, quanti ne dinota il doppio numero de' lati di essi, cioè il numero di quelli del poligono del lato BD. Ma lo stesso numero di volte si contiene anche il triangolo DOB in

(*) Ciò può facilmente rilevarsi dal Lib IV. degli Elementi di Euclide.

quest' ultimo poligono. Adunque i triangoli DFO, DOB ABO sono tre grandezze, delle quali ne sono ugualmente multiplici rispettivi il poligono del lato DE, quello del lato DB, e l' altro del lato AC: perciò questi poligoni saranno tra loro come quei triangoli*. Or il triangolo DOF sta all' altro DOB, come la base OF alla base OB, per essere ugualmente alti*; e quindi come OD ad OA*: ed in questa stessa ragione è pure il triangolo DOB al triangolo BOA, per aver essi il loro vertice comune in B. Laonde il triangolo DOF starà al triangolo DOB, come questo triangolo DOB all' altro AOB, cioè i tre triangoli DOF, DOB, BOA saranno continuamente proporzionali; e quindi anche continuamente proporzionali saranno i poligoni, che hanno rispettivamente per lati le DE, DB, AC, i quali si sono dimostrati proporzionali ad essi triangoli DOF, DOB, AOB. C. B. D.

* 15.V.
* 1.VI.
* 2.VI.

LEMMA II.

Ogni poligono di un numero pari di lati uguali circonscritto ad un cerchio, e quarto proporzionale in ordine alla somma de' due poligoni inscritti in tal cerchio, l' uno simile al già circonscritto, e l' altro, che ha la metà del numero di lati, al doppio di questo, ed all' altro poligono circonscritto, che gli è simile.

Si supponga fatto lo stesso apparecchio del Lemma precedente, e sieno DB, DE i lati dei due poligoni inscritti nel cerchio DBE, ed AC un lato di quel poligono circonscritto, ch' è simile all' inscritto del lato DE: e di più si tirino al cerchio DBE, per gli punti D, E, le tangenti DL, EH; sarà LH il lato dell' altro poligono circonscritto simile all' inscritto del lato DB, cioè sarà LH il lato di quel poligono regolare circon-

fig. 83.

scritto al cerchio DBE, che ha doppio numero di lati del già circonscritto. Or io dico, che questo poligono del lato LH sia quarto proporzionale in ordine a' due poligoni inscritti, cioè quelli, che hanno per lati le DB, DE, al doppio di quello del lato DE, ed al poligono circonscritto del lato AC.

Si congiungano le OL, OH. E poichè i due triangoli LDO, LBO hanno tutti i loro lati uguali; perciò essi saranno anche uguali, e l'angolo DOB resterà diviso per metà dalla LO: per la qual cosa starà AO ad OB, o pure OD, come AL ad LB*. Ma AO sta ad OD, come il triangolo ABO al triangolo DBO*, o pure come questo triangolo DBO all'altro DOF*; ed AL sta ad LB, come il triangolo AOL al triangolo LOB*. Adunque starà il triangolo DBO al triangolo DOF, come il triangolo AOL all'altro LOB: e, componendo, i due triangoli DBO, DOF staranno al triangolo DOF, come il triangolo AOB al triangolo LOB. Ma il triangolo DOF sta al suo doppio, come il triangolo LOB al doppio di esso*, cioè al triangolo LOH. Laonde le tre grandezze, cioè i due triangoli DOB, DOF insieme, il triangolo DOF, ed il doppio di questo stesso triangolo DOF sono in ordinata ragione con tre altre grandezze, cioè col triangolo AOB, col triangolo LOB, e col triangolo LOH; e quindi, per ugualità, dovrà stare il triangolo DOB insieme coll'altro DOF al doppio di esso DOF, come il triangolo AOB al triangolo LOH. Per la qual cosa, essendosi dimostrato, che i poligoni i quali hanno per lati rispettivamente le DB, DE, AC sieno ugualmente multiplici de' triangoli DOB, DOF, AOB*: e potendosi facilmente dimostrare, che il poligono del lato LH sia pure ugualmente multiplice del triangolo LOH, ne segue, che dovendo aver luogo tra gli ugualmente multiplici la stessa proporzione, che tra

* 3. VI.
* 1. VI.
* l. prec.
* 1. VI.
* 15. V.
* di l. pre.

le parti*, debbe perciò stare il poligono del lato DB * insieme con quello del lato DE al doppio del poligono del lato DE, come il poligono del lato AC al poligono del lato LH. C. B. D.

* 15. V.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se si prenda per unità il raggio di un cerchio; un tal cerchio, con un' approssimazione di meno di una diecimilionesima, sarà espresso da 3, 1415926 *quadrati del raggio.*

Essendosi preso per unità il raggio del cerchio; il quadrato del raggio dinoterà l'unità quadrata, della quale ne sarà doppio il quadrato inscritto nel cerchio, e quadruplo il circonscritto. Quindi se tale unità quadrata si concepisca divisa in 1,0000000 parti uguali; il quadrato inscritto in un tal cerchio sarà espresso da 2,0000000, e 'l circonscritto da 4,0000000. E trovando geometricamente il medio proporzionale tra i due numeri 2,0000000, e 4,0000000; un tal medio proporzionale, ch' è 2,8284271 esprimerà in quadrati del raggio l'ottagono inscritto*. Ed il quarto proporzionale 3,3137085 * in ordine alla somma di que' numeri, che si è poc'anzi veduto rappresentare l'ottagono, e'l quadrato inscritto, al doppio di questo, ed al numero, che esprime il quadrato circonscritto dinoterà, anche in quadrati del raggio; l'ottagono circonscritto*. Similmente passando, * col mezzo de' due precedenti lemmi, dall' ottagono inscritto, e circonscritto ad un tal cerchio, prima alla figura di 16. lati inscritta, e poi alla circonscritta, e così continuando successivamente, si troverà essere . .

* l. 1.

* l. 2.

La fig. di			
16	*lati iscr.* 3,0614674,	*e la circos.*	3,1825979
32	3,1214452		3,1517249
64	3,1365485		3,1441189
128	3,1403311		3,1422236
256	3,1412772		3,1417504
512	3,1415138		3,1416321
1024	3,1415729		3,1416025
2048	3,1415877		3,1415951
4096	3,1415914		3,1415933
8192	3,1415923		3,1415928
16384	3,1415925		3,1415927
32768	3,1415926		3,1415926

Donde chiaramente apparisce, che le due figure ciascuna di 32768 lati uguali, una inscritta, e l'altra circonscritta al cerchio, fino alle loro parti diecimilionesime non si differiscono affatto tra loro, essendo espresse dallo stesso numero 3,1415926; ond' è, che la loro differenza dovrà consistere in parti più piccole di una diecimilionesima del quadrato del raggio. E perciò anche il cerchio, ch' è medio tra queste due figure dovrà essere espresso da 3,1415926 quadrati del raggio. C.B.D.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Un cerchio sta al quadrato del diametro come 3,1415926 *a* 4,0000000.

* 2. VI. Essendo i cerchi come i quadrati de' diametri*, starà, permutando, un cerchio al quadrato del diametro, come un altro cerchio al quadrato del diametro suo. Ma nel teorema precedente una tal ragione per lo cerchio del raggio 1. si è trovata esser quella di 3,1415926 a 4,0000000: poichè eran questi i numeri che si è ve-

duto esprimere il cerchio ed il quadrato del diametro. Laonde questa stessa dovrà essere la ragione di un qualunque altro cerchio al quadrato del suo diametro. C. B. D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Il diametro di un cerchio, sta alla sua circonferenza, come 1 *a* 3,1415926.

Imperocchè essendo il quadrato del diametro duplo del rettangolo del diametro stesso nel raggio *, sarà quadruplo del triangolo rettangolo, che ha per lati dintorno all' angolo retto un tal diametro, e il raggio; poichè questo triangolo è anche metà di quel rettangolo. Adunque starà questo triangolo al quadrato del diametro del cerchio come 4,0000000 a 3,1415926. Laonde, per ugualità, quel triangolo starà al cerchio, o sia ad un altro triangolo rettangolo, che ha per lati dintorno all'angolo retto la circonferenza ed il raggio *, come 1. a 3,1415926. Che perciò essendo questi triangoli come le basi *; starà anche il diametro alla circonferenza, come 1. a 3,1415926. C. B. D.

* *l.* VI.
* *p. Ar.*
* 1. VI.

FINE.

NOTE
CRITICHE, E GEOMETRICHE
SU I PRIMI SEI LIBRI
DEGLI
ELEMENTI DI EUCLIDE
E SULL'UNDECIMO E DUODECIMO

LE QUALI RENDONO RAGIONE DE' CAMBIAMENTI, CHE IN QUESTA EDIZIONE SI SONO FATTI NEL TESTO GRECO, O PURE CONTENGONO OSSERVAZIONI SOPRA ALCUNE PROPOSIZIONI.

Vi sono in fine aggiunte alcune altre Note sul I°. Libro di Archimede *della Sfera e del Cilindro*, e sull'altro *della Misura del Cerchio*.

IN NAPOLI
Nella Stamperia della Reale Accademia di Marina.
1820.

AVVERTIMENTO.

Trovandosi nelle figure citate in queste Note una cifra araba ed un'altra romana, la prima dinota il numero della figura, e l' altra il Volume in cui esiste la Tavola ov'essa trovasi: che se invece della cifra romana vi stia una N, allora tal figura dovrà cercarsi nelle Tavole delle Note.

NOTE ec.

AL LIBRO I.

Alla Def. VII.

La presente definizione della superficie piana è quella che trovasi in tutti i Codici Greci ed Arabi degli Elementi; ed è sicuramente di Euclide. Il Simson però nel suo Euclide ha voluto adottare l'altra seguente: « La superficie piana è quella nella quale presi due « punti ad arbitrio, la linea retta che gli congiugne « cade in essa superficie » *la qual proprietà della superficie piana*, soggiugne poi egli nelle Note, *è manifestamente supposta negli Elementi*. E questa era la nozione della superficie piana che diede anche Archimede.

Alla Def. VIII.

Per non interrompere l'ordine delle Definizioni che trovasi nel Testo Greco, abbiamo noi ritenuta la presente Definizione, che abbiamo però segnata daccanto, per dinotare ch'essa è superflua. Imperciocchè in tal definizione si comprende non solamente quella dell'angolo contenuto da due linee rette, che poi Euclide reca specialmente nella Definizione seguente; ma anche di quelle altre specie di angoli l'uno contenuto da una linea retta e da una curva, e l'altro da due linee curve. Or la condizione espressa in tal Definizione 8., che le linee le quali s'inclinano non debbano formare una linea continuata, distrugge le pos-

sibilità di comprendere in essa definizione le summentovate due specie di angoli, non potendo supporsi una curva nella stessa direzione di una linea retta, o pure due curve nella medesima direzione fra loro. Sicchè per tal ragione questa definizione 8., dice bene il Simson, è vuota di senso. Devesi anche riflettere che Euclide delle suddette due specie di angoli non fa alcuna menzione negli Elementi, se però se ne eccettui qualche luogo, ove il Testo è stato interpolato, come faremo osservare quando occorrerà farne parola. Nè poi la Geometria Elementare ha bisogno di considerare queste due specie di angoli.

Inoltre deve notarsi che la seguente definizione 9. si trova nel Testo connessa colla 8.; sicchè ne forma a dirittura una continuazione, e vi e necessariamente unita; il che non si trova giammai praticato da Euclide. Per tutte le anzidette ragoui, noi, seguendo il Simson, e stimando a proposito, che la definizione 8. che trovasi negli Elementi debbasi tralasciare, abbiamo perciò data la definizione 9. per intero, ed indipendentemente dalla 8.

Alla Def. XVII.

A questa definizione, ch'è completa nella maniera come noi l'abbiamo recata, in tutti i migliori esemplari di Geometria, vi sta aggiunto « la quale divide anche per metà il cerchio »: il che non solamente non fa parte della definizione; ma avrebbe anche bisogno di dimostrazione: ed il dimostrarlo sarebbe quì fuori luogo. Proclo l'ha dimostrato col concepir uno de' semicerchi applicato sull'altro, come può vedersi nell'Euclide del Commandini; ma tolto la necessità di dimostrar ciò per la presente definizione, una tal verità si vale-

va chiaramente dalla 31. del Lib. III, e dalla 24. dello stesso; poichè dalla prima di esse Proposizioni si sa, che i semicerchi sieno segmenti simili, e dall' altra che questi sieno uguali.

Alle def. XVIII. e XIX.

Per render di più chiara intelligenza queste due definizioni si è detto » e da una delle due parti della circonferenza » in vece di dire » e dalla circonferenza « come si trova nel Testo Greco, e presso tutti i Comentatori.

Alla def. XXXII.

Roberto Simson ha tacciata questa definizione, quasi che essa contenga un' affezione superflua alla cosa definita; perciocchè, egli dice, *ogni figura quadrilatera che ha i lati opposti uguali tra loro, avrà an he uguali gli angoli opposti, e viceversa*, e lo dimostra. Ma prima di questa dimostrazione, la quale dipende da alcune proposizioni del Lib. I., non potevasi concepir mai una tal verità; e perciò la condizione degli angoli doveva entrare nella definizione: altrimenti si sarebbe potuto credere, che oltre la figura quadrilatera, che in essa si definisce, ve ne potesse essere anche altra i cui angoli opposti essendo uguali, non lo fossero poi i lati; e così per lo contrario. E qui giova di avvertir generalmente, che non dovrà mai proscriversi una definizione di Geometria, sol perchè vi sia in essa qualche condizione eccedente; purchè però il soggetto, che si vuol definire resti con opportuna distinzione determinato: nel che, come tutti sanno, consiste la precisione del geometrico definire.

Al Postul. VI.

Il numero de'Postulati nel Testo Greco è di cinque, de quali i due ultimi trovansi, presso molti Comentatori, trasportati tra gli Assiomi, formando l'11. e 12. di questi; ma in realtà senza fondamento: perchè l'11, cioè il nostro Postulato 4. è conseguenza immediata della natura e definizione dell'angolo retto, e perciò non è una nozione comune ed ovvia, come si richiederebbe perchè fosse un assioma; e l'altro, cioè il 12. è un principio da Euclide dimandato, perchè non potè dimostrarlo, la qual condizione, che forma una imperfezione per gli Elementi, non lo fa perciò diventare un Assioma.

Nella presente edizione però abbiamo anche posto tra il numero de'Postulati il 10°. Assioma, cioè che: *Due linee rette non chiudono spazio*, formandone il 6°. Postulato; poichè una tal verità è una conseguenza chiara della definizione della linea retta, e non già un Assioma: ed in ciò ci siamo valuti a proposito dell'autorità del codice greco sul quale ha fatta la sua versione il Peyrard.

A' Corollarj delle Prop. V. e VI.

A ciascuna di queste due Proposizioni abbiamo aggiunto un Corollario, conformandoci in ciò anche al Simson, che così fece nel suo Euclide in Inglese.

Alla Prop. VII.

L'enunciazione di questa Proposizione l'abbiamo cambiata senza affatto alterare il senso di essa, poichè

il tradurre tale enunciazione a parola dal greco, la rendeva difficile a concepirsi da'giovani. Di più la nostra enunciazione ci sembra più propria per l'applicazione di tal proposizione all'8ª. di cui è Lemma. Anche il Simson ebbe la stessa idea nel suo Euclide.

Inoltre la dimostrazione di una tal Proposizione ha chiaramente due casi, de'quali quello che si trova mancante nel Testo Greco, cioè il secondo, (*V. l' esposizione nostra*) e che si è tralasciato dalla maggior parte de' Comentatori, è ugualmente necessario che l' altro che vi si trova. Che poi il caso omesso fosse stato da principio nel Testo, come giudiziosamente riflette il Simson, è chiaro da ciò, che la seconda parte della Prop. 5. del Lib. I, ch' è necessaria per dimostrare un tal caso, non ha verun altro uso. Si vede poi chiaramente, che una tal seconda parte derivi dalla prima parte, e dalla Prop. 13 del Lib. I; e perciò che dovè essere aggiunta per qualche Proposizione tra la 5, e la 13. Ma tra queste, oltre la 7, niun' altra ne ha bisogno; adunque vi fu posta per la 7. Anche la versione in lingua Araba ha esplicitamente dimostrato un tal caso. Oltre questo caso, dal Commandini, e dal Simson pure, se ne trova aggiunto un terzo, nel quale supponesi, che il vertice di uno de' due triangoli cada in uno dei lati dell'altro; ma siccome l' assurdo che deriverebbe da tale ipotesi è manifesto, abbiamo perciò creduto a proposito di trascurare questo terzo caso, contentandoci semplicemente di accennarlo.

Il Sig. Peyrard nella Prefazione al Vol. I. del suo Euclide avvertì anche tal difetto nel Codice di cui egli si valse per le sue versioni. Egli fu però di opinione, che nel Testo Greco non vi avesse dovuto essere una distinzione in casi diversi, ma sì bene una doppia figura con una sola dimostrazione, ch' è quella che in

essi ordinariamente trovasi; ed a tal proposito egli soggiugne: *Omnes Commentatores in errore versabantur. Figura incompleta erat in omnibus editionibus. Secundam descripsi figuram; produxi rectas BC, BD, et demonstratio completa fuit in Textu Greco nulla voce mutata.*

Or sebbene tal maniera di dimostrare questa Proposizione, secondo dice il Signor Peyrard, non debba negarsi che sia ingegnosa; pur tuttavia non è essa sicuramente quella che tenne Euclide, che dovè essere analoga all'altra da noi recata, come lo stesso Peyrard confessa nella Prefazione al Vol. II°. della citata sua Opera, reso in ciò più istruito dalla lettura dell'Euclide tradotto dall'Arbo da Campano, nella qual versione è da notarsi che quel terzo caso di cui sopra sta detto si trova solamente accennato, del pari che da noi è stato fatto.

E quì devesi per ultimo avvertire, che la verità ch'Euclide dimostra nella Prop. 7, non deve credersi da lui stabilita assolutamente come Lemma dell' 8a, e quindi inutile a recarsi negli Elementi, ogni qual volta questa potesse indipendentemente da quella dimostrarsi, come taluno degli espositori di Euclide ha malamente creduto; ma essa è ancora necessaria per istabilire l'unicità di quel punto che serba distanze date da due dati punti, la qual cosa è interessante per la teorica de' *Dati di Siti.*

Al Corollario della Prop. XIV.

Un tal corollario era necessario a recarsi negli Elementi perchè di esso si fa uso nelle dimostrazione della Proposizione 1. del Lib. XI. Il Simson aveva dimostrata la verità che in esso si reca in un Corollario aggiunto alla Prop. 11. del presente Libro; ma veramente una

tal verità va meglio dedotta dalla Proposizione 14. come da noi si è fatto.

A' Corollarj della Prop. XV.

Nel Testo Greco si trova aggiunto alla Prop. 15. un Corollario in cui si dice che: *Quante rette si segano scambievolmente in un punto, vi fanno gli angoli uguali a quattro retti.* Il Simson credè opportuno di dividere in due un tal Corollario, facendo servire il primo di essi come passaggio all'intelligenza del secondo, ch' è quello di Euclide più generalmente enunciato, e noi lo abbiamo in ciò imitato.

Il Peyrard lo ha a dirittura tralasciato nel suo Euclide, non avendolo trovato nel Codice di cui si è servito per la sua versione. Egli ha però avuto torto in così fare.

Alla Prop. XXII.

Euclide ha tralasciato in questa proposizione di provare, come taluni moderni *rigoristi* avrebbero voluto, che i due cerchi DKL, KMN si debbano intersegare, risultando ciò evidentemente dalla *determinazione* ch' egli aveva data, cioè che: *due delle rette proposte per costruire il triangolo, fossero, comunque prese, maggiori della terza.* E, dice bene Roberto Simson, qual principiante di Geometria vi sarà mai, il quale non rileverà da ciò immantinente, che essendo FD minore di FH, il cerchio descritto col centro F, e coll'intervallo FD debba incontrare la retta FH tra i punti F, H; e similmente, che essendo GH minore di GD, il cerchio descritto col centro G, e coll' intervallo GH debba incontrare la retta DG tra G e D; e che quei cerchi debbano inoltre intersegarsi, per essere i loro raggi FD, GH insieme maggiori della FG? Ma vedia-

fig. 22 I.

mo un poco in qual modo coloro, che hanno imputata a difetto di Euclide questa tale omissione, vi hanno poi supplito. Tommaso Simson ne' suoi Elementi di Geometria alla pag. 49 assegna per determinazione della costruzione del presente problema quest' altra dedotta da Euclide, e men semplice di essa, cioè, che *una qualunque delle tre rette date debba esser minore della somma, e maggiore della differenza delle altre due*, e da ciò dimostra, in un solo caso, che i cerchi si debbano intersegare, aggiungendo poi, che lo stesso avrebbe luogo negli altri casi. In tal dimostrazione non ha però avvertito, che la retta GM, ch'egli toglie dalla GF potrebbe esserne maggiore, ed allora la sua dimostrazione non regge, e bisognerebbe farne un' altra per questo caso. Ed il Wolfio, tutto che gran logico, viene a ragione tacciato dal Montucla, per aversi ne'suoi *Elementa Matheseos Universae t. 1. pag. 118. ediz. del* 1740, *e* 1743 proposto a dimostrare il seguente teorema: *Se presi per centri gli estremi di una linea retta, e con due raggi i quali insieme presi sieno maggiori di quella retta, si descrivano due cerchi; questi si dovranno intersegare*; il che non è sempre vero, a meno che, come Tommaso Simson ben vide, la differenza di que' due raggi non sia minore della distanza de' centri di que' due cerchi. Ed in questo stesso errore cadde anche il Wolfio, allorchè nel Problema 12. de' citati Elementi propose a: *Costruire un triangolo con tre rette date, due delle quali prese insieme sieno maggiori della terza.*

In fine dell' enunciazione di questa Proposizione, nel Testo dagli Elementi, ed anche nel Codice del Peyrard, si trova inutilmente soggiunto: *quia et omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt omnifariam sumpta.*

Alla Prop. XXIV.

Il Simson verso il principio di questa dimostrazione vi ha aggiunto « delle linee rette DE, DF sia DE quella, che non è maggiore dell' altra DF « cioè si prenda quella delle linee rette DE, DF, che non è la maggiore, per costituirvi l' angolo EDG uguale all' altro BAC, poichè (soggiugne egli) senza una tal condizione, questa Proposizione avrebbe tre casi diversi, come si vede presso Campano, ed altri. Or, con buona pace di sì gran Geometra, la sua riflessione non è troppo giusta, poichè è vero, che l'apparecchio di questa dimostrazione, quando la DE non si prenda con la condizione, ch' egli vi appone, dia tre casi distinti, quello, cioè, in cui la EG cade al di sopra della EF, e quindi il punto F si ritrovi fuori del triangolo DEG; l' altro nel quale la EG si supponga coincidere con la EF; ed il terzo in cui la EG cada al di sotto della EF; e perciò il punto F si ritrovi dentro del triangolo DGE. Ma è ugualmense vero, che il secondo caso è intuitivo; ed il terzo, dimostrato che si è, come nel primo, che EG è uguale a BC, si riduce evidentemente alla Prop. 21. Adunque Euclide ha dimostrato in questa Prop. 24. solamente il caso, che aveva bisogno di dimostrazione. La maniera come ha poi il Simson esclusi quei due altri casi, non soddisfa completamente; poichè avrebbe egli dovuto dimostrare, che costituendosi l' angolo EDG uguale all' angolo BAC, nel punto D della DE, che non è la maggiore delle DE, DF, e presa la DG uguale alla DF, la EG cada necessariamente al di sopra della EF, e quindi il punto F fuori del triangolo EDG: il che non ha egli fatto.

fig. 24. I.

Alla Prop. XXIX.

La dimostrazione di questa proposizione è fondata su quel principio di Geometria, che da Euclide fu stabilito per quinto Postulato, e del quale alcuni Comentatori hanno formato l'11°, o il 12°. Assioma; ma che però per comune avviso de' Geometri sì antichi, che moderni, non può aver luogo tra gli assiomi, avendo bisogno di esser dimostrato: ed una tal dimostrazione ha travagliate le menti de' Geometri inutilmente per lungo tempo. *Veggasi a questo proposito la Dissertazione sul Post. V. in fine del Vol. I.*

Alla Prop. XXXII.

Nella presente edizione abbiamo aggiunti a questa Prop. due Corollarj necessarj a recarsi negli Elementi, perchè non facili a rilevarsi da' giovani principianti di Geometria. Lo stesso aveva anche fatto il Simson.

Alla Prop. XXXV.

Il Simson, seguendo il Commandini, ed altri Geometri ha distinta questa dimostrazione in tre casi, e solamente ha cercato di comprendere il secondo, ed il terzo in una sola dimostrazione. Ma in verità una tal distinzione è superflua; poichè il primo caso, nel quale si suppone, che il parallelogrammo BCFD abbia per un suo lato la diagonale BD dell'altro ABCD, è una conseguenza immediata della Prop. 34, e gli altri due casi, cioè quelli in cui si suppone, che il punto E cada tra i punti A, e D, o pure al di là del punto D nel prolungamento della AD, ch' è il caso che si trova nel Testo Greco, hanno identiche dimo-

fig.37.I.

fig.35.I.

strazioni. È perciò che noi abbiamo creduto superflua un tal distinzione.

Alla Prop. XLV.

Seguendo il Commandini, ed il Simson, si è aggiunto a questa proposizione un Corollario, del quale si ha bisogno principalmente nella Prop. 25. del Lib. VI.

AL LIBRO II.

Alla Prop. XIII.

Il Simson seguendo l'esempio che gliene avevano dato nei loro comenti agli Elementi di Euclide il Commandini ed il Clavio ha enunciata la presente Proposizione in una maniera generale ed applicabile ad ogni specie di triangoli, e ne ha perciò divisa la dimostrazione in tre casi de' quali quello che riguarda il triangolo rettangolo ci sembra inutile affatto a recarsi, essendo una conseguenza immediata della Prop. 47 del Lib. I; e gli altri due, cioè quello in cui la perpendicolare abbassata sopra un lato adjacente all'angolo acuto cade dentro del triangolo, e l'altro in cui cade fuori potevansi comprendere in una sola dimostrazione, raddoppiando la figura, come noi abbiamo fatto.

Dalla verità dimostrata in questa proposizione, combinata con quella della proposizione precedente, si può ricavare il seguente Teorema, elementare, che qui rechiamo, avendone bisogno in appresso. (*).

(*) Nel lib. II. delle Sez. Con.

TEOREMA.

fig. 61. I. *Se si divida per metà la base BC di un triangolo ABC; i quadrati de' lati AB, AC saranno il doppio del quadrato della metà BE della base, e del quadrato della congiungente AE.*

Imperocchè abbassata dal vertice B sulla base BC la perpendicolare AD: nel triangolo ottusangolo AEC, il quadrato di AC è uguale a quelli di AE, e di EC insieme col doppio rettangolo di CE in ED*, o sia di BE in DE. E nell' altro triangolo AEB, il quadrato di AB lato opposto all' angolo acuto in E pareggia quelli di AE, e di EB toltone lo stesso doppio rettangolo di BE in DE*. Laonde i due quadrati di AB, e di AC pareggeranno i quadrati di BE, di EA, di EA, e di EC, cioè il doppio quadrato di BE, insieme col doppio quadrato di EA. C. B. D.

* 12. II.

* 13. II.

Alla Prop. XIV.

Nella dimostrazione di questa proposizione, dice bene il Simson, vi è stato da taluno inettamente interposto se non sia BE uguale ad ED, una di esse sarà la maggiore; sia questa la BE, che si prolunghi in F ec. » come se prolungando la minore, la costruzione non potesse aver luogo. Si è perciò tolta una tal condizione, e detto solamente « si prolunghi BE in F ec. »

AL LIBRO III.

Alla Def. I.

Il Simson dopo questa definizione soggiunge: *haec non est definitio, sed theorema cujus veritas patet; si enim circuli quorum quae ex centris sunt aequales, sibi mutuo applicentur, ita ut centra eorum congruant, congruent et ipsi circuli.* Ed alla Nota della Def. 10. del Lib. XI. di nuovo dice: *quae enim dicitur definitio prima libri III. revera est theorema, in quo asseritur eos circulos aequales esse; quorum quae ex centris sunt aequales, quod quidem ex definitione circuli perspicue apparet, ideoque a quodam inter definitiones non proprie locatum est. Non enim aequalitas figurarum definienda est, sed demonstranda.* Una tal proposizione è veramente una conseguenza immediata della definizione del cerchio, come l' è della definizione dell'angolo retto il quarto postulato, che perciò essa può aversi come un Principio di Geometria Elementare.

Alla Def. VII.

La presente definizione è inutile per la Geometria, ed ha dovuto essere intrusa negli Elementi senza alcun fondamento da qualche antico Scoliasta o Amanuense; chè perciò nella nostra versione l' abbiamo segnata accanto, seguendo l' esempio del Simson.

Alla Prop. I.

Tra le imputazioni date ad Euclide da alcuni moderni, per un rigore malinteso, vi è quella delle dimostrazioni indirette, delle quali non è egli solo che

ha fatto uso ne' suoi Elementi; ma Archimede, e tutti gli altri antichi Geometri. Or questi moderni *rigoristi* nel trattar severamente Euclide hanno manifestata la loro imperizia; poichè non hanno avvertito, che vi sono alcune cose, le quali non possono in altra maniera dimostrarsi. Al qual proposito il Sig. d' Alembert giudiziosamente dice. » Le dimostrazioni che si possono « impiegare in Geometria sono di due specie, *dirette*, o « *indirette*. Le prime si deducono immediatamente dal- « la nozione stessa dell'oggetto, del quale si vuole stabi- « lire qualche proprietà, e sono quelle che debbonsi « impiegare in preferenza, perchè illuminano nel tempo « stesso, che convincono. Ma se il numero delle nostre « conoscenze certe è piccolissimo; quello delle nostre » conoscenze dirette l'è ancor più ristretto. Noi ignoria- » mo per rapporto ad un gran numero di oggetti quel- « lo ch'essi sono, e quello che non sono, e per molti al- « tri non ne abbiamo, che idee negative, cioè a dire, « possiamo meglio sapere quello che non sono, che quello » che sono; e possiamo chiamarci ancora felici, nella « nostra indigenza, di possedere questa conoscenza im- « perfetta, e troncata, che non è che una maniera più « dolce di essere ignoranti. Or in tutti questi casi si è « nell'obbligo di ricorrere alle dimostrazioni indirette. « Ed il Sig. Montucla anch'egli parlando di costoro, dà ad essi il torto, per la ragione, che: « vi sono senza dubbio « delle proposizioni, le quali non possono esser dimostra- « te, che in questa maniera ». Ma se il d'Alembert ha voluto ciò comprovare con un ragionamento astratto, ed appartenente ad ogni genere di verità, e che il Montucla si è contentato di stabilirlo come massima nelle ricerche geometriche; il Simson da profondo geometra ha voluto dimostrarlo col seguente ragionamento applicato alla Prop. 1. del Libro III. di Euclide, che in ve-

rità è un esempio evidentissimo per comprovare ciò che si è detto. Ecco quello ch'ei dice » Non si può dimostrare » direttamente la prima del Lib. III. di Euclide; poichè « oltre la definizione del cerchio, non v' ha su questa fi- » gura principio alcuno, da cui si possa dedurre una tal » dimostrazione in qualunque modo; che perciò è neces- » sario, che si dimostri che il punto assegnato per « costruzione sia il centro del cerchio, fondandosi sola- » mente sulla definizione del cerchio e sulle proposizioni « già dimostrate. Or poichè in tal dimostrazione biso- » gna far uso di questa verità, cioè, che: *le linee rette « tirate dal centro alla circonferenza sono uguali tra » loro*; e non è lecito di assumere, che il punto ritrovato » per costruzione sia il centro, perchè questo è quello » che deve dimostrarsi: è manifesto perciò, che debba » assumersi un altro punto come centro; e se da que- » sto assunto segue qualche assurdo, come in fatti » dimostra Euclide, che segue; allora ne risulta, » che il punto preso non è il centro. E siccome un » tal punto si è preso ad arbitrio; perciò nessun al- » tro, oltre quello che per costruzione si è ritrova- » to, potrà essere il centro. E da ciò (conchiude il » Simson) si rileva la necessità della dimostrazione » indiretta, o sia per assurdo ». Noi però in altro luogo di queste Note stabiliremo con nuovi argomenti la necessità di siffatta maniera di dimostrare (*Veg. la Nota alla Prop.2.Lib.* XII.).

Alla Prop. IX.

Questa Proposizione ha nel Testo Greco due dimostrazioni diverse, la prima diretta, e quella dell' *Aliter* indiretta. Noi abbiamo preferita in questi Elementi la seconda di esse, poichè mostrava un' applicazione della Prop. 7., che altrimenti avrebbe fatta

una interruzione alla catena geometrica; ed anche perchè più breve della diretta, che ora qui rechiamo. Anche il Simson aveva fatto lo stesso nel suo Euclide.

fig. 1. N. *Sia il cerchio ABC dentro del quale prendasi il punto D, donde cadano alla circonferenza più di due linee rette uguali, come le DA, DB, DC: dico che il pun- D sia il centro del cerchio ABC.*

Si giungano le AB, BC, che si dividano per metà ne' punti E, F, ed unite le ED, DF, si prolunghino fino a' punti K, G; L, H. E poichè la AE è uguale alla EB, ed è comune la ED; saranno le due AE, ED uguali alle due BE, ED; è pure la base DA uguale alla base DB; adunque l' angolo AED sarà uguale all' angolo BED; e perciò ciascun di essi sarà retto. Laonde la GK segando la AB per metà gli è perpendicolare. E poichè se nel cerchio una qualche linea retta sega un' altra e gli è nel tempo stesso perpendicolare; in quella segante deve trovarsi il centro del cerchio; perciò il centro del cerchio ABC si troverà nella GK. Per la stessa ragione deve esso trovarsi nella HL: e queste due linee rette non hanno altro punto di comune se non il punto D. Quindi D è il centro del cerchio ABC. C. B. D.

Alla Prop. X.

Anche per questa proposizione abbiamo ne'nostri Elementi preferita quella compresa nell' *Aliter* del Testo di Euclide, e non già la prima, che per altro era anch' essa indiretta; e ciò ad oggetto di connetterla con la precedente, ed anche per la brevità della dimostrazione dell' *Aliter* in paragone dell' altra che ora qui rechiamo. Così pure aveva fatto il Simson.

fig. 2. N. Se può avvenire la circonferenza ABC tagli la circonferenza DEF in più di due punti, come in B, G,

F, H; e giunte le BG, BH si dividano per metà in K, L, e da questi punti si tirino ad esse BG, BH le perpendicolari KC, LM, che si prolunghino fino a' punti A, E. E poichè una linea retta AC, nel cerchio ABC, divide un' altra linea retta BH per metà e ad angoli retti; dovrà in questa AC ritrovarsi il centro del cerchio ABC. Di nuovo, perchè nel medesimo cerchio ABC una linea retta NX divide l' altra BG per metà e ad angoli retti; perciò in quella NX dovrà esistere il centro del cerchio: e si è dimostrato che doveva tal centro ritrovarsi anche nella AC; e questa retta e la NX non convengono in altro punto, che in O. Adunque O è il centro del cerchio ABC. Similmente dimostreremo che il punto O sia anche il centro del cerchio DEF. Quindi due cerchi che s' intersegano avrebbero lo stesso centro; che non può essere. Che perciò un cerchio non sega un' altro cerchio in più di due punti. C. B. D.

Alla Prop. XV.

Ad imitazione del Simson abbiamo aggiunta a questa Proposizione la conversa della seconda parte di essa, ove si dice nell'enunciazione: *e quella ch' è maggiore sarà più vicina al centro che la minore*, supplendovi la dimostrazione. E con ragione il Simson ha fatto tal cambiamento nel Testo, per rendere questa proposizione uniforme alla precedente con cui è strettamente connessa, e nella quale Euclide avea data l' enunciazione e la dimostrazione della diretta e della conversa.

In quanto poi alla dimostrazione della prima parte della Prop. 15, ci siamo attenuti anche alla maniera del Simson, avendo evitato d' introdurre, come si trova nel Testo di Euclide, e presso gli altri suoi espo-

fig. 77.1 sitori, un'altra retta perpendicolare alla FK, ed a distanza dal centro uguale alla EH, la quale risultava
* 14 III uguale alla BC*, per intermezzo onde provare che il diametro AD era maggiore di BC.

Alla Prop. XVI.

In questa Proposizione si è reso dal Testo Greco il vero senso della medesima, senza aver fatta menzione dell'*angolo del semicerchio*, e di quello che alcuni concepiscono contenersi dalla circonferenza, e dalla tangente, de' quali angoli Clavio, Pelletier, ed altr moderni molto disputarono tra loro, e da essi dedussero maravigliosi paradossi, a verun de' quali è di fondamento l'enunciazione da noi rapportata. Similmente nulla dicemmo dell'angolo del segmento maggiore, o del minore nella Prop. 31. di questo Libro; ma abbiamo enunciato il senso della proposizione, senza quelle parti di essa, che taluno potrebbe giustamente sospettare che fossero adulterine, come afferma il Vieta nella pag. 386. delle sue Opere Matematiche.

Alla Prop. XVII.

A questa Prop. si è aggiunto il caso in cui il punto dato, donde si vuol tirare la tangente, si suppone essere nella circonferenza del cerchio; il qual caso, sebbene facile, non doveva però tralasciarsi; poichè di esso Euclide spesso fa uso nel Lib. IV.

Alla Prop. XXI.

Nel Testo Greco non si trova dimostrato, che quel solo caso di questa Proposizione, in cui si suppone,

che il segmento sia maggiore del semicerchio: vi mancava dunque la dimostrazione nel caso che tal segmento fosse semicerchio, o minore del semicerchio, cioè non maggiore del semicerchio; e questa si è dal Simson, e da noi supplita, derivandola in una maniera semplicissima da quella del primo caso.

Alle Prop. XXIII, e XXIV.

Nella Prop. XXIV. si dimostra, che il segmento AEB non possa non combaciare col segmento CFD, e mutar sito in modo, che le loro circonferenze s' intersegnino; perchè altrimenti si dice » un cerchio seghe- » rebbe un altro cerchio in più di due punti ». Il Simson con ragione osserva, che ciò doveva dimostrarsi impossibile nella 23, nella quale si era solamente dimostrato impossibile, che l' un segmento potesse comprendersi nell' altro, e non già nella 24 la cui dimostrazione risulta immantinente dalla 23. Egli dunque togliendo tal passaggio dalla 24. lo ha riposto nel suo proprio luogo nella 23; e noi abbiamo fatto lo stesso. Anche il Clavio vidde, che nella 23 vi bisognava dimostrare la condizione che le circonferenze di que' due segmenti non potevano intersegarsi, e supplì tal dimostrazione, ma egli poi fuor di proposito stimò necessario d' includerla anche nella 24, ove ne fece di più un caso a parte. *fig.* 86.I.

Dal già detto risulta che il Testo Greco ha dovuto essere in queste due Proposizioni enormemente alterato.

Alla Prop. XXV.

Questa proposizione si trova nel Testo Greco divisa in tre casi, due de' quali hanno la stessa costruzione, e dimostrazione; ed è perciò che l'abbiamo divisa in due solamente.

Alla Prop. XXXIII.

Anche questa proposizione si trova divisa nel Testo Greco in tre casi, due de' quali, quello cioè nel quale l'angolo dato si suppone acuto, e l'altro in cui si prende per ottuso, hanno del tutto la stessa costruzione, e dimostrazione: perciò noi abbiamo tralasciata come superflua, la distinzione di questi due casi, che abbiamo compresi in un solo, in cui abbiamo detto. « Che se poi l'angolo dato non è retto ». Inoltre la dimostrazione del caso nel quale l'angolo dato fosse retto, anche per imperizia, ha dovuto esser cambiata in un'altra inelegante, e piena d'inutili passaggi; che perciò con Clavio, e Simson l'abbiamo restituita nella sua forma genuina.

Alla Prop. XXXV.

Siccome le Proposizioni 25, e 33. erano state divise in più casi, così, dice bene il Simson, questa si era divisa in minor numero di casi, che faceva bisogno. Nè può sospettarsi, che Euclide gli abbia tralasciati per la loro semplicità, poichè diede il più facile di essi, cioè quello nel quale si suppone, che le due linee rette s'interseghino nel centro; e poi nella seguente Prop. 36 dimostra anche separatamente il caso semplicissimo, nel quale la segante si suppone passar per lo centro. Par dunque, che Teone, o qualche altro tra gli antichi gli abbia tolti per brevità; il che non deve affatto aver luogo in un libro elementare. É perciò, che abbiamo restituiti i casi tralasciati, come gli offrono le versioni dall' Arabo.

Alla prop. XXXVII.

In fine di questa proposizione si sono cancellate le parole » similmente si dimostrerà, se il centro sia » nella AC » come per ignoranza aggiunte da qualche editore.

AL LIBRO IV.

Alla Prop. IV.

In questa Proposizione, come anche nella 8, e nella 12. di questo Libro, si dimostra ordinariamente per assurdo, che il cerchio tocchi le linee rette, che sono tirate per costruzione perpendicolari a' suoi raggi; mentre lo stesso si dimostra direttamente nelle Proposizioni 17, 33, e 37 del Lib. III. Abbiamo dunque anche in quelle proposizioni del presente Lib. seguita la stessa via, la quale è pure più breve.

Alla Prop. V.

Il Simson riflette bene, che la dimostrazione di questa proposizione sia stata da taluno viziata; poichè non vi si dimostra, che le linee rette le quali dividono per metà, ed angoli retti i lati del triangolo, convengano tra loro; e poi fuor di proposito si divide in tre casi, essendone una la costruzione, e la dimostrazione di essi, come osservò acconciamente anche Campano. Abbiamo dunque supplita quella parte della dimostrazione, ch' era mancante, in una maniera più semplice di quella tenuta dal Simson: ed abbiamo tralasciata la distinzione in casi diversi, come inutili ripetizioni.

Che poi una tal proposizione sia stata da taluno viziata nel Testo Greco, lo mostra evidentemente anche il Corollario di essa, nel quale si fa menzione di un angolo dato, mentre niente vi è, nè può esservi nella Proposizione intorno ad un tal angolo.

Alle Prop. XV, e XVI.

Nel Corollario della 15 vi mancano nel Testo Greco le parole *equilatero*, *ed equiangolo*; e nella 16. si trova *cerchio* in vece di *circonferenza*, dove si dice » quindi di quante parti è il circolo ABCD. »E ciò trovasi anche altrove praticato negli Elementi, come nella IX. e X. del Lib. III. Noi però abbiamo creduto di porre sempre in questi luoghi la voce *circonferenza*.

AL LIBRO V.

Alla Def. III.

Senza discettare sulle opinioni, che tanti Geometri hanno avute di questa definizione, ci sia permesso di proporre brevemente un nostro comento ad essa. » La ragione è un certo rapporto scambievole di due grandezze dello stesso genere, secondo la quantità. Dicendosi è *un certo rapporto scambievole*, si deve intendere, che potendo indistintamente paragonarsi l'una di esse all' altra, o questa alla prima; non debba chiamarsi ragione, che un solo di questi rapporti per volta. L' aggiunto *secondo la quantità* è stato male interpetrato anche da Geometri sommi. Si è creduto, che fosse questo un' affezione della ragione, e quindi, che bisognasse una definizione particolare per la voce *quantità*: e per questa definizione quanti errori geometrici si sieno

commessi, sarebbe troppo lungo il dirlo. Si riscontri su tal proposito la Nota alla definizione della ragion composta. La voce *quantità* non è relativa alla ragione; ma a'termini, che la rappresentano; ed Euclide, o il Geometra qualunque siasi, che ha fatta una tal definizione, ha voluto significare con quell'aggiunto, ch'esse grandezze dovevano paragonarsi semplicemente come grandezze, senza tener conto nè della loro specie, nè del loro sito, o di altra qualunque affezione, che potesse competerle; e'l Commandini di fatti aveva ciò adombrato nel suo comento a tal definizione col dire, al proposito del *quatenus ad quantitatem pertinet- Vide ne potius dictum sit, ut intelligatur proportio, quae in quantitate, non item ea, quae in aestimatione consistit*.

Anche il Gregory ha preso un equivoco a questo proposito, quando ha detto, che doveva invece di *quantitatem* dirsi *quantuplicitatem*; poichè in tal caso non si definirebbe, che la sola ragione *multiplice*, il che renderebbe particolare una tal definizione: e poi non sarebbe essa adattabile, che alle sole quantità commensurabili tra loro.

Alla Def. V.

La definizione di un soggetto geometrico, dice bene il Galileo (*), deve aggirarsi nell' esposizione di una delle passioni di esso, che sia però la più facile di tutte, e quella per appunto, che si stimi la più intelligibile, anche dal volgo non introdotto nelle Matematiche. Euclide stesso così ha fatto in molti luoghi. Sovvengavi ch' egli non disse il cerchio essere una figura piana, dentro la quale tutt'i quadrilateri abbiano gli angoli opposti uguali a due retti. Quando anche

(*) Principio della quinta giornata.

così avesse detto, sarebbe stata buona definizione. Ma mentre egli sapeva un' altra passione del cerchio più intelligibile della precedente, e più facile a formarsene concetto; chi non si accorge, ch' egli fece assai meglio a mettere avanti quella più chiara, e più evidente, come definizione, per ricavar poi da essa le altre più recondite, e dimostrarle come conclusioni. É secondo questi principj, che dobbiamo mettere ad esame la definizione 5 del Lib. V.

Suppongasi dunque, come lo suppose Euclide mentre le definì, chè le grandezze proporzionali si trovino, cioè che date in qualunque modo quattro grandezze, quella ragione, o quel rispetto, o quella relazione di quantità, che ha la prima verso la seconda, la stessa possa avere una terza verso una quarta; e sieno A, B, C, D queste quattro grandezze proporzionali, cioè come A a B, così stia C a D; l'idea che ciascuno si ha formato della ragione dalla def. 3., gli farà subito vedere, che tali ragioni essendo uguali, non potrà essere a meno, che le due quantità A, C, che si paragonano sieno minori, o uguali, o maggiori respettivamente di quelle a cui si paragonano, cioè delle B, D.

Or essendo A a B, come C a D; si vede chiaramente che il doppio di A debba anche serbare a B la stessa ragione, che il doppio di C a D; poichè ciascuna di queste nuove ragioni è doppia di ciascuna delle proposte, che supponevansi uguali. Similmente, che il triplo di A debba serbare a B la stessa ragione, che il triplo di C a D; e così pure, che il quadruplo di A, il quintuplo ec. debba avere a B la stessa ragione, che il quadruplo, il quintuplo ec. di C a D: cioè in generale, che nA stia a B, come nC a D; dinotando con nA, ed nC due ugualmente multiplici qualunque di A, e di C.

Or essendo $nA : B :: nC : D$, si potrà conchiudere con la stessa induzione di poc'anzi, che stia $nA : mB :: nC : mD$, dinotando con mB, ed mD due qualsivogliano altri ugualmente multiplici di B e di D: perciò di nuovo le nA, nC si dovranno accordare in esser minori, o uguali, o maggiori delle mB, mD. Adunque la definizione 5. del Lib. V. conterrà una delle più chiare affezioni delle ragioni uguali.

Ma potrebbe dirsi da taluno, l' essersi provato, che questa affezione competa alle ragioni uguali, non esclude, che possa anche appartenere alle disuguali. Or noi diciamo, che sebbene Euclide nella defin. 7. abbia assunto per vero, che il carattere delle ragioni uguali non possa competere alle disuguali, non per questo può dirsi, che ci abbia data una dottrina inesatta delle ragioni uguali, e disuguali; perciocchè egli stesso fa vedere nella Prop. 8, come essendo disuguali due ragioni si può sempre trovare quel caso, nel quale questa proprietà inalterabile delle ragioni uguali non ha luogo per esse. Finalmente potrà dirsi: Euclide in quella Prop. 8. dimostra la possibilità del concetto da lui assunto nella definizione 7 supponendo, che le due ragioni abbiano un conseguente comune. Ma ciò non deroga alla generalità del concetto: perciocchè se stia A a B in maggior ragione di C a B, e che quindi si verifichi il concetto di Euclide; niente impedisce, che si supponga essere C a B, come M ad N, e dovendosi poi in tal caso verificare, per la def. 5, che se un multiplice di C è minore, o uguale a quello di B, l'ugualmente multiplice di M debba anch'esser minore, o uguale a quello di N; ne segue, che il multiplice di A superando quello di B, l'ugualmente multiplice di M non superi quello di N; il che è conforme a ciò, che si era stabilito da Euclide.

Dopo tutto quello che si è detto, e che può aversi

come un bastante comento alla definizione 5 del lib. V., eccone anche un altro per coloro, che credendola oscura l'hanno sbandita da' loro libri, con poco buon senso geometrico, sostituendovi l'altra volgare ed impropria, perchè particolare, fondata sul principio di ugual continenza, ch' Euclide aveva anch' egli con assai più precisione che quelli non fanno, riportata nel libro VII., per carattere dell'uguaglianza delle ragioni tra numeri alle quali sta bene adattata. Una tal definizione secondo Euclide è la seguente.

DEF. XX. DEL LIB. VII.

» Numeri proporzionali sono, quando il primo del
» secondo, ed il terzo del quarto fossero o ugualmen-
» te multiplici, o la stessa parte, o le stesse parti.

Or noi nel seguente teorema mostreremo a costoro, che il criterio delle ragioni uguali che si assegna in questa definizione sia identico a quello della def. 5. del Lib. V. cioè che poste quattro grandezze proporzionali secondo la def. 20. del VII°. esse risultino anche tali per la def. 5. del V°.

PROP. TEOR.

Sieno A, B, C, D, quattro grandezze tali, che A sia ugualmente multiplice, o la stessa parte, o le stesse parti di B, che C di D: dico che gli ugualmente multiplici di A e C debbano accordarsi in esser maggiori, uguali o minori di qualsivogliano altri ugualmente multiplici di B e D.

A B C D

E G F H

Cas. 1. Suppongasi primieramente A tanto multiplice di B, quanto C di D, e sieno E ed F gli ugualmente multiplici di A e C, e G ed H qualsivogliano altri ugualmente multiplici di B e D. E poichè E ed F sono ugualmente multiplici di A e C, e queste lo sono per supposizione di B e D, saranno E ed F anche ugualmente multiplici di B e D. Ma delle stesse B e D ne sono anche ugualmente multiplici G ed H. Adunque se E sia un maggior multiplice di B, che G della stessa B, dovrà anche F essere un maggior multiplice di D, che H di D stessa; val quanto dire, che se E fosse maggiore di G, sarebbe F maggiore di H: e similmente se E fosse uguale a G, o pur minore, si dimostrerebbe che F sarebbe uguale, o minore di H.

Cas. 2. Suppongasi ora che A sia quella stessa parte di B che C l'è di D, saranno al contrario le B e D ugualmente multiplici delle A e C, e la dimostrazione procederà in questo caso, come nel precedente.

A B C D

b *d*

E G F H

Cas. 3. Che se le B, D si suppongano essere le stesse parti delle A, C: si supponga essere *b* una parte di A, e *d* una stessa parte di C; e sieno inoltre, come nel primo caso, E ed F gli ugualmente multiplici di A e C, e G ed H quelli di B, e D. E poichè E ed F sono ugualmente multiplici di A e C, ed A e C lo sono di *b* e *d*, saranno anche E ed F ugualmente multiplici di *b* e *d**. Similmente perchè G ed H sono ugualmente multiplici di B e D, e B e D lo

* 3. V.

sono di b e d, mentre b e d sono la stessa parte di A e C, e B e D ne sono le stesse parti; saranno G ed H anche ugualmente multiplici di b e d. Adunque di b e d ne sono ugualmente multiplici non solamente E ed F, ma anche G ed H: che perciò se E sia un maggior multiplice di b, che G, dovrà anche F essere un maggior multiplice di d, che H; val quauto dire che se E fosse maggiore di G, F lo sarebbe di H: e così pure si dimostrerebbe che se E fosse uguale o minore di G, anche F sarebbe uguale o minore di H.

Che se si fosse supposto, al contrario, che le A e C sieno le stesse parti delle B e D, la dimostrazione si sarebbe fatta come la poc' anzi recata nel caso 3.

Laonde resta dimostrato il proposto teorema creduto difficile a dimostrarsi da molti comentatori di Euclide.

Alla Def. V.

Dopo la definizione della ragion duplicata, e della triplicata bisognava porvi, come nel proprio suo luogo, dice bene il Simson, la definizione della ragion composta, della quale quelle ne sono alcune specie; anche perchè Euclide dimostra nelle Proposizioni 22., e 23. del Libro V. una principale affezione della ragion composta, cioè che: *se le ragioni, che ne compongono una sieno uguali respettivamente a quelle altre che ne compongono un'altra; le composte saranno pure uguali.* Teone senza dubbio tolse una tal definizione da questo luogo, che l' era proprio, e trasportandola tra le definizioni del Libro VI. vi sostituì quella, che ordinariamente è la quinta di un tal Libro, e ch' è interamente inutile, ed assurda. Una tal definizione, secondo la versione del Commandini, è la seguente: *Una ragione si dice composta da più ragioni; quando la quantità sua è formata dal prodotto delle quantità delle ra-*

gioni, *che la compongono*. Il Wallis alla voce *quantità* sostituì quella di *esponente*; ma in qualunque senso si prendano le parole *quantità*, o *esponente di ragione*, ed il loro *prodotto*; la definizione sarà sempre *ageometrica*, ed inutile. Imperciocchè nessuna multiplicazione vi può essere, se non per numeri. La *quantità* poi, o l' *esponente di ragione*, come l' interpetra Eutocio nel suo comento alla Prop. 4. del Lib.II. di Archimede sulla Sfera, e sul Cilindro, è quel numero, che si ottiene dividendo l'antecedente per lo conseguente; e questa maniera d' intenderla è stata adottata dai moderni. Or vi sono molte ragioni nelle quali nessun numero può ottenersi dalla divisione dell' antecedente per lo conseguente, come, per esempio, la ragione del quadrato al suo lato; quella della circonferenza del cerchio al diametro, ed altre, che hanno luogo tra grandezze incommensurabili, le quantità delle quali non possono mai ottenersi in numeri, se pur non si voglia ricorrere ad approssimazioni, ed infinitesimi, che sono cose dal rigore della Geometria Elementare interamente aliene. Teone in fatti, Eutocio, e Vitellione quando hanno voluto dimostrare il concetto da essi adottato nella loro definizione, hanno dovuto ricorrere alla definizione di Euclide, ed assegnare ai termini, che formavano le ragioni, ch'essi volevano comporre, un valore discreto. Queste loro dimostrazioni si potranno riscontrare presso Clavio ne' comenti alla def. 5. del Lib. VI.

Si potrà anche rilevare, che sia suppostizia la definizione di cui si parla, se si paragoni la def. 6. del Lib. VI. con la Prop. 5. del Lib. VIII. Imperciocchè in questa proposizione si dimostra, che un numero piano i cui lati sono C, D serbi ad un altro numero piano i cui lati sieno E, F una ragione composta dalle ragioni di C ad E, e di D ad F, cioè dalle ra-

gioni de'lati. Or la ragione composta da quelle di C ad E, e di D ad F, per la def. 5. del Lib. VI, e secondo la spiega, che ne danno tutt'i comentatori, è la ragione del numero che si ottiene multiplicando gli antecedenti C e D al numero, che nasce dalla multiplicazione de'conseguenti E ed F; vale a dire la ragione del numero piano, i cui lati sono C e D, all' altro i cui lati sono E ed F. Adunque tal Prop. 5. del Lib. VIII. coincide con la def. 5. del Lib. VI. perciò in uno de' luoghi è superflua; poichè sarebbe assurdo il porre per definizione ciò, che si deve poi dimostrare. Or non v'ha dubbio, che la Prop. 5. del Lib. VIII. debba aver luogo negli Elementi; poichè in essa si dimostra per gli numeri piani lo stesso, che nella Prop. 23. del Lib. VI. si dimostrò de'parallelogrammi equiangoli: perciò la def. 5. del Lib. VI. non deve avervi luogo. E quest' ultimo argomento del Simson è assai concludente per provare, che la def. 5. del Lib. VI. non sia stata posta negli Elementi da Euclide, ma da Teone.

Inoltre di una tal definizione non se ne incontra vestigio presso Archimede, Apollonio, e gli altri antichi, i quali spesso si servono della ragion composta; e presso lo stesso Euclide nella Prop. 23. del Lib. VI, nella quale si fa la prima volta menzione della ragion composta, non si trova nè anche applicata la definizione di Teone; che anzi Euclide esplicitamente si serve di quella da noi rapportata. (*Veg. una tal Prop., e la Nota corrispondente*) Nè si può dubitare, che sia stato Teone colui, che la introdusse negli Elementi in vece della genuina definizione, che ne aveva data Euclide; poichè si trova anche ne'comentarj, ch'egli aggiunse all' *Almagesto* di Tolomeo, ove reca di essa una spiegazione puerile, perchè conveniente, come abbiamo poc' anzi detto, a quelle sole ragioni, che possono esi-

birsi in numeri. Di più Campano, che si servì per la sua versione di codici Arabi, non riconosce una tal definizione; e Clavio ne' suoi comentarj alla def. 5. del Lib. VI. giudicò rettamente, che la definizione della ragion composta forse fu fatta nel modo stesso, che quella delle ragioni duplicata, e triplicata. (*Veg. il luogo poc'anzi detto*) Un Geometra Inglese Edmund Scarburgh, nel suo Euclide alle pag. 238, e 266. manifestamente afferma, che la def. 5. del Lib. VI. sia supposta, e che la vera definizione della ragion composta si contenga nella def. 10. del Lib. V. Con tutto ciò fa maraviglia come egli, ed altri moderni abbiano ritenuta la definizione di Teone, illustrandola con immensi comentarj; mentre avrebbero dovuto interamente sbandirla dagli Elementi.

Nel Codice di cui si è servito il Sig. Peyrard mancava una tal definizione, che perciò egli l' ha giudicata inutile, nel che è stato appoggiato da' Sig. Prony e Delambre nel loro rapporto all' Istituto di Francia, i quali volendo giustificare Peyrard, per averla tralasciata, manifestamente hanno detto, che » la miglior » ragione per ciò fare si era, perchè essa è presso » a poco inutile, e che non è molto corretta. » Ma chi mai de' Geometri potrà credere inutile la definizione della ragion composta, della quale il traduttore Francese si prevale poi, come Euclide, nelle proposizioni ove se ne ha bisogno, senza citar definizione?

Non è però fuor di proposito di qui avvertire, che ove i termini delle ragioni componenti sieno espressi con numeri, la ragione composta da esse potrà ottenersi, o col prendere due numeri, che si serbino quello stesso rapporto, che vien dinotato dal prodotto de' quozienti degli antecedenti delle ragioni date per gli conseguenti di esse, i quali quozienti esprimono i valori di

queste ragioni componenti; o pure col paragonare il prodotto degli antecedenti a quello de' conseguenti di esse. Così se le ragioni componenti sieno quelle di 6: 5, di 4 : 3, e di 7 : 9; la ragione, che da esse si compone sarà rappresentata da quella di $6 \times 4 \times 7 : 5 \times 3 \times 9$, cioè di 168: 136; o pure da due numeri de' quali uno diviso per l'altro dia un risultamento identico a quello, che si ottiene multiplicando $\frac{5}{6}$ per $\frac{4}{3}$ e per $\frac{7}{9}$.

Si riscontri anche al proposito di questa definizione la Nota alla Prop. 23. del Lib. VI.

Alla Def. XIII.

Il *permutando* dovendo aver luogo necessariamente in due ragioni, mentre l' *invertendo*, il *componendo* ec. può eseguirsi in una sola, doveva dirsi *la permutazione di ragioni*, e non già la *ragion permutata*, come si trova in tutti gli Elementi di Geometria. Di più siccome la permutazioae di ragioni non può aver luogo che quando i termini di esse sieno dello stesso genere, era necessario, che ciò si fosse avvertito nella definizione, come noi abbiamo fatto. Il Simson ha definite queste voci di *permutando*, *invertendo*, ec., colla condizione, ch' esse fossero *de' modi da mutare o l' ordine o la grandezza delle quantità proporzionali* solamente; il che senza oggetto particolarizza tali definizioni. L' altra condizione poi, ch' egli vi aggiunge, cioè *in modo che restino proporzionali*, fa dipendere la definizione da un concetto, che deve essere dimostrato sempre possibile, e ch' egli pure dimostra nelle proposizioni B, 16., 17., 18., ed E del Lib. V.

Alla Def. XVIII.

Questa definizione, nel Testo Greco, e presso tutti i Comentatori si trova espressa in un modo, che la rende inconcludente; poichè prima si suppone, che le ragioni de'termini da una parte sieno respettivamente uguali a quelle degli altri termini uguali in numero, che sono dall'altra; e che sia nelle prime grandezze il primo termine all'ultimo, come il primo all'ultimo nelle seconde grandezze; e ciò, come si è detto nella nota precedente, includerebbe anche nella definizione proposta quello che deve dimostrarsi nelle Proposizioni 21., e 22.; e poi si soggiugne: *vel aliter est sumptio extremorum per subtractionem mediarum*; lo che distrugge tutte le condizioni, che si eran prima supposte necessarie al definito. E lo stesso ha luogo anche nell'Euclide di Peyrard. Briggs nel suo Euclide Greco-Latino stampato in Londra nel 1620., non ha ritenuta, che questa sola ultima definizione: e bene, se non si tien conto delle ragioni, che serbansi le quantità intermedie tra i termini estremi delle due serie, che si paragonano, a che serviranno questi termini? Quindi una tal definizione, è anche incompleta per questo riguardo. Ecco i motivi, che ci hanno fatto allontanare dagli altri Geometri, ed anche dal Simson nel definire l'*equalità* di ragione (*ex aequo*, o *ex aequali*).

Alle Def. XIX., e XX.

Essendosi da Euclide proposta generalmente la def. 18., era conveniente, che la 19., e la 20 si proponessero anche generalmente, e non già su tre grandezze paragonato con altre tre: di più si dovevano tali definizioni, in grazia de' giovani, esprimere in una ma-

niera più chiara, per evitare gli equivoci, che potevano esser prodotti dalle ordinarie definizioni, che s' incontrano negli Elementi.

Al Postulato.

Seguendo il Viviani abbiamo premesso per Postulato alle teoriche del Lib. V. un principio, che deriva immediatamente dalla def. 3. di un tal Libro, e ch' è stato da Euclide assunto in qualche dimostrazione. Si riscontri anche a questo proposito la nota alla Proposizione 18. del Lib. V.

Alla Prop. IV.

A questa Proposizione sta aggiunto nel Testo Greco, e presso tutti i Comentatori, e Traduttori di Euclide il seguente Corollario: *Ex hoc manifestum est si quatuor magnitudines sint proportionales, et contra* (hoc est invertendo) *proportionales esse.* Una tal verità però non ha niente che fare con la Proposizione da cui si vuol derivare, e con più ragione sarebbe stata dedotta dalla Def. 5., che da questa Proposizione, se l'ordine geometrico avesse permesso di farlo. Noi ad imitazione del Simson ne abbiamo fatta una Proposizione da se, e solamente ci siamo allontanati da quel Geometra pel luogo ove l'abbiamo collocata nel Lib. V. essendo a noi sembrato più proprio di porla dopo del *permutando* che dopo la Prop. 6., mentre essa non serve ad alcuna della seguenti, sino alla dimostrazione del *convertendo*.

Alla Prop. V.

Nella dimostrazione di questa Proposizione di dice:
fig. 119 L.a e per quanto AE è multiplice di CF, per altrettanto si

» faccia EB multiplice di CG ». Da ciò trae argomento il Simson, che un tale apparecchio non sia di Euclide: *non enim*, dice egli, *Euclides docet quomodo secari possint rectae lineae, nedum aliae magnitudines in partes aequales, antequam ad Prop.9. Lib. VI. veniat, nunquam autem in constructione jubet aliquid fieri, quod facere non prius docuerat.* Ma il Simson qui ha torto; poichè è vero, che Euclide non ha mai assunto nella costruzione di un Problema una cosa, se prima non abbia dato il mezzo di farla: ma da ciò non segue, che nella dimostrazione di un Teorema non si possa supporre qualche cosa, che chiaramente si vede esser possibile. Quindi non si è regolato colla sua consueta avvedutezza il medesimo Simson, allorchè per questa stessa ragione ha criticate alcune altre dimostrazioni del Lib. V., che noi abbiamo ritenute, perchè fatte con tutto il geometrico rigore.

E quì conviene anche avvertire, che nelle parole del Simson vi è un difetto di espressione; poichè avendo egli detto *nedum aliae magnitudines*, e poi soggiunto *antequam ad Prop.9. Lib.VI.veniat*, par che dia ad intendere, che in tal Proposizione si proponga a dividere in parti uguali una grandezza qualunque: il che non è vero.

Alla Prop. VI.

Questa Proposizione ha due casi; ma nel Testo Greco abbiamo solamente la dimostrazione del primo; ch' è lo più semplice. È verisimile che Teone, o alcun altro degli antichi abbia taciuta la dimostrazione dell' altro, stimando che fosse già bastante l' averne esposto un solo per una Proposizione, che, del pari che la 5., non ha verun uso nella teorica delle ragioni, che forma l' oggetto principale del Lib. V. Ma quando do-

vevasi rendere incompleta la dimostrazione di una verità, era meglio tacerla del tutto. Noi abbiamo al contrario esposta la dimostrazione del caso più generale, ed abbiamo avvertito, che quella del primo caso si deduceva facilmente da questa. Nè abbiamo poi creduto di dover sbandire dal Lib. V. le Proposizioni 5, e 6; poichè sembra, che Euclide le abbia recate, non tanto per farle servire alla dottrina delle ragioni; quanto per dare una più completa dottrina degli ugualmente multiplici.

Alla Prop. VIII.

Nella dimostrazione di questa Prop. come si ha ora nel Testo Greco, vi sono due casi (*Veggasi una tal* fig. 122 I *dimostrazione nell'edizione di Ervagio, o di Gregory*), il primo de' quali è quello in cui si suppone AC minore di CB, ed in questo necessariamente ne segue, che FG multiplice di CB sia maggiore di FE ugualmente multiplice di AC; e perciò essendo, per costruzione, un tal multiplice di AC maggiore di D, anche FG sarà maggiore di D. Ma nel secondo caso, nel quale si suppone CB minore di AC, sebbene FE sia maggiore di D, può pure FG esser minore di D: per lo che non si può prendere un multiplice di D, che sia il primo a superare FG; mentre la semplice D supera di già FG. Fu perciò necessario all'autore di questa dimostrazione di cominciare dal prendere FG multiplice di BC, che fosse maggiore di D, e poi continuare come se BC fosse la CA del primo caso, e CA la CB. Questi due casi si potevano però agevolmente comprendere in un solo, come noi seguendo l'esempio del Simson abbiamo fatto, ed evitare così un'inutile distinzione, che rende la dimostrazione di una tal proposizione lunga, ed oscura. Vi è pure un terzo caso, del quale non si trova fatta menzione

nel Testo, quello cioè in cui la minore delle AC, CB sia maggiore di D; nel qual caso, com' è chiaro, basterà prendere di AC, e di CB qua'sivogliano ugualmenta multiplici, come nella nostra dimostrazione si è fatto. È manifesto da ciò, conchiude bene il Simson, che Teone, o qualche altro comentatore non molto perito nella Geometria abbia viziata una tal proposizione.

Alle prop. IX. e X.

Roberto Simson ha cambiate le dimostrazioni di queste Proposizioni, spargendo su quella della Prop. X., che v'era nel Testo Greco, alcuni dubbj, i quali perchè si sembrano non ben fondati, non ci hanno determinato ad adottare verun cambiamento nè per essa, nè per la precedente.

Alla Prop. XIII.

A questa Proposizione si è aggiunto un Corollario, ch' è necessario alle dimostrazioni delle Proposizioni 20., e 21. di questo Libro; ed è poi ugualmente importante, che la stessa proposizione.

Alla Prop. A.

La verità che si dimostra in questa proposizione era necessaria a recarsi negli Elementi: poichè spesso è usata da' Geometri: ed Euclide stesso si prevale di essa nella 25. del presente Libro, 31 del VI., 34. dell' XI., e nelle 5, e 15. del XII. Nè può dirsi, ch' egli abbia voluto conseguire un tal passaggio di cui aveva bisogno per le suddette dimostrazioni, applicando il permutando alla 14. del Lib. V.; poichè primieramente egli non ha ciò indicato, che anzi mani-

festamente ha detto, *essendo la prima maggiore della seconda, la terza lo sarà della quarta.* Ed in secondo luogo è facile ad avvertire, che ciò non potrebbesi conseguire nel modo già detto, quando i termini delle due ragioni non fossero omogenei; mentre in tal caso non vi si può adattare il permutando: e ciò per l'appunto ha luogo nella 34. del Lib. XI., e nella 15. del XII. Questa riflessione è sfuggita al Clavio, ed al Commandini, i quali ci hanno perciò date, ne' loro comenti ad Euclide, alcune dimostrazioni della verità di cui parliamo, che affatto non soddisfano, e che anzi possono indurre i giovani in manifesti paralogismi.

Alla Prop. XIV.

De'tre casi di questa proposizione non se ne trova nel Testo, che un solo: è sembrato dunque necessa ad alcuni Geometri, come al Clavio, al Simson ec. di supplirvi gli altri due casi, la dimostrazione de' quali non è interamente simile a quella del primo; e noi ci siamo regolati nel modo stesso.

Alla Prop. B.

Questa Proposizione, che altre volte derivammo come Corollario dalla 15. di questo Libro, di cui è conversa, e che in seguito credemmo più conveniente al sistema Euclideo di esporla in forma di teorema, era necessario che si recasse nel Libro V.; poichè se ne ha bisogno, applicandovi il permutando, nella proposizione 9. del Lib. VI. della quale tutt' i Comentatori ed espositori degli Elementi, eccetto il Simson, per mancanza di questa conversa, ci han data una soluzione particolare, e non conforme alla sua enunciazione. (*Vegg. le versioni del Commandini, del Clavio, del Gregory, ec.*

Alla Prop. XVI.

Nell' enunciazione di questa Proposizione era necessaria la condizione, *del genere stesso*, affinchè il *permutando* vi si potesse adattare, a norma della def. 13. Lib.V.

Alla Prop. XVIII.

Roberto Simson asserisce, che la dimostrazione di questa Prop. non sia di Euclide, giacchè in essa si suppone, che date tre grandezze, delle quali almeno due sieno del genere stesso, esista la quarta proporzionale in ordine ad esse; e soggiunge: *priusquam autem hoc ostensum fuerit, nihil valebit demonstratio quae nunc legitur. Verum hoc sine demonstratione assumitur. . . . . . Euclides certe id non ostendit, nedam quomodo quarta illa proportionalis inveniri potest, antequam ad 12. sexti Elementi veniat: nunquam autem aliquid in demonstratione Propositionis assumit, quod non priuś ostenderat, saltem quod existere posse non perspicuum sit; ope enim Propositionis incertae, conclusio certa elici non potest.* Ed egli credè perciò, che Teone, o qualche altro avesse cambiata la dimostrazione di Euclide, come troppo lunga, in quella che ora si trova nel Testo Greco: e maggiormente di ciò si persuase osservando, che, nella maniera come ora abbiamo il Lib.V., le Prop.5.e 6.non hanno verun uso; ma che per lo contrario sarebbero essenziali alla 18. dimostrata alla sua maniera.

Comunque ciò sia; è però certo, che il dirsi « se fig.132.I. » non sia come AB a BE, così CD a DF, sarà come » AB a BE, così CD o ad una grandezza minore di » DF, o ad una maggiore », è un concetto possibile, che si comprende anche senza dimostrazione, e perciò da potersi adottare come postulato. Questa soverchia

scrupolosità, che spargersi nella Geometria dal Simson e da qualche altro Geometra moderno di minor forza, se corressero altri tempi, la ridurrebbe allo scetticismo. Noi abbiamo perciò ritenuta l'ordinaria dimostrazione, anche perchè per la sua brevità riesce più facile pe' giovani.

Ed è da avvertirsi, che quando anche la Prop. 9. del Lib. VI. potesse precedere la 18. del V.; non perciò dovrebbe il Simson credersi contento; poichè in quella si propone a ritrovare la quarta proporzionale dopo tre linee rette date; mentre in questa Prop. si parla di tre grandezze qualunque, le quali possono anche esser due sole omogenee, senza che lo sieno colla terza.

Alle Prop. C. e D.

Per la Prop. C si vegga la nota alla Prop. IV. Lib. V., e per l'altra D, veggasi la nota che or segue.

Alla Prop. XIX.

Nel testo Greco, e presso tutt'i Comentatori si trova aggiunto a questa Prop. un Corollario, ch'è di un'importanza pari a quella della medesima Prop. Un tal Cor. però mostra manifestamente, che il Lib. V. dagl'ignoranti di Geometria sia stato corrotto. Imperciocchè la proporzionalità che risulta dal *convertendo*, che si vuol dimostrare in questo Cor., in nessun modo può dipendere dalla 19; mentre nella 19. le quattro grandezze, che si paragonano debbono essere del genere stesso, e nella conversion di ragione i termini di una ragione possono essere anche di diverso genere con quelli dell'altra: perciò la dimostrazione di tal verità, che ne danno per mezzo della 19. varj interpetri di Euclide non è legittima, come giustamente osservò Clavio, che ne diede

una conveniente, la quale fu poi adottata dal Simson, e lo è stata anche da noi nella prop. D, che abbiamo preposta alla proposizione 19 del Lib. V. Intanto lo stesso Clavio, per una inconseguenza difficile a capirsi, mentre riconobbe, come abbiamo detto, che la dimostrazione del *convertendo* non poteva dipendere dalla 19ª, e mentre cercò di dimostrarla senza di questa, la espose poi come un Coroll. della 19, che incomincia *Hinc facile demonstrabitur* ec.; e soggiugne bene il Simson a questo proposito: *cum nullo modo inde sequatur.*

Alle Prop. XX. e XXI.

Le dimostrazioni delle Prop. 20ª, e 21 erano state rese nel Testo più brevi di quello, che bisognava, sopprimendovi, come anche avvertimmo nella Prop. 14, due casi che si trovano da noi restituiti.

Alle Prop. XXII. e XXIII.

Queste due proposizioni sono un indizio manifesto de' guasti prodotti dagli antichi espositori di Euclide ne' suoi Elementi di Geometria. Imperocchè, in primo luogo, mentre la 22 e 23 sono due proposizioni analoghe, e le quali non debbono nella loro enunciazione differirsi in altro, se non che nel trattarsi nella prima di esse di grandezze proporzionali in ordinata ragione, e nella seconda di grandezze che hanno proporzione perturbata tra loro, si trova l'enunciazione della prima di tali proposizioni fatta generalmente, cioè per un qualsivoglia numero di grandezze in ordinata ragione con altrettante, e quella della seconda per tre sole grandezze che sieno in perturbata ragione con tre altre. Inoltre anche la dimostrazione della prima di tali proposizioni, sebbene la sua enunciazione sia generale, si trova fatta

per tre grandezze solamente che sieno in ordinata ragione con tre altre. È vero che tal dimostrazione si può facilmente estendere a quattro, ed anche a qualsivoglia numero di grandezze, ma in un libro elementare, principalmente come è scritto quello degli Elementi di Euclide, ciò andava fatto espressamente, almeno fino a quattro grandezze con quattro altre ordinatamente proporzionali, molto più che di questo caso si deve far uso in appresso. Ed in effetto il Commandini si vide nell' obbligo di supplire questa parte mancante in un comentario da lui aggiunto accortamente a tal Proposizione, il quale comincia così: *Idem demonstrabitur etiam si plures sint, quam tres magnitudines*, lasciando poi la 23., la quale era stata particolarmente enunciata, senza l' aggiunta di un simigliante comentario. Noi in questa nostra esposizione degli Elementi di Euclide abbiamo supplito a que' difetti nel Testo de' quali finora si è detto; nel che per altro eravamo stati preceduti dal Simson.

Alla Prop. XXIV.

L'enunciazione di questa Proposizione si potrebbe anche render generale nel seguente modo: *Se vi sieno più grandezze omogenee, e ciascheduna serbi ad una comune seconda la stessa ragione, che ciascuna di altrettante, anche tra loro omogenee, ad una comune quarta; la somma delle prime dovrà anche serbare alla seconda la stessa ragione, che la somma delle altre alla quarta*: e la dimostrazione in questo caso si renderebbe generale col metodo stesso tenuto cioè quella della Proposizione 21.; al che fare si potranno utilmente esercitare i giovani.

Il Simson ha aggiunto a questa Proposizione 24 un Corollario, ove dice, che: *Poste le cose stesse della*

Proposizione, sarà l' eccesso della prima, e della quinta alla seconda, come l' eccesso della terza, e della sesta alla quarta «. Ma noi, per non gravar troppo il Testo, l' abbiamo tralasciato; anche perchè non dovevamo valercene in questi Elementi, e che altronde esso è facile a rilevarsi.

Alle Prop. E, F, G, H, I, K.

Queste Proposizioni che contengono le principali e più necessarie teoriche della ragion composta era importante il recarle nel V°. Libro degli Elementi di Geometria.

AVVERTIMENTO.

Termineremo queste Note al Lib. V., coll' avvertire coloro, che desiderano di veder solidamente difesa la dottrina delle proporzioni esposta da Euclide, e pienamente confutati gli argomenti contro di essa addotti dal Tacquet, da Alfonso Borelli, e da altri, di consultare con grandissimo loro profitto le *Lezioni Matematiche* 7. ed 8. di Barrow.

Finalmente ridotto un tal Libro nel modo come l'abbiamo esposto, cioè restituitolo in quei luoghi ne' quali lo avevano sì sconciato i Comentatori antichi, ciascuno dovrà convenire col chiarissimo Barrow, e col Simson: *Nihil extare in toto Elementorum opere proportionalium doctrina subtilius inventum, solidius stabilitum, accuratius petractatum.* E da ciò potrà rilevassi con quanto sciocco ardimento molti s' impegnino a cambiarlo, o anche lo sbandiscano interamente dagli Elementi, con grandissimo danno del rigore geometrico.

AL LIBRO VI.

Alla Def. II.

Roberto Simson credè, che questa seconda definizione non fosse di Euclide; ma di taluno poco versato nella Geometria: e ciò per la ragione, che nè Euclide, nè verun altro Geometra antico fa menzione delle figure reciproche. Egli però l' ha ritenuta ne' suoi Elementi, facendovi qualche cambiamento, per renderla più chiara, come appunto può vedersi quì appresso.

DEF. II. DEL LIB. VI. secondo il SIMSON.

» Le figure reciproche, cioè i triangoli, ed i parallelo
» grammi, sono quelle che hanno i lati dintorno a due
« angoli in modo proporzionali, che un lato della pri-
» ma stia ad un lato della seconda, come l' altro lato
« della seconda all' altro lato della prima ».

Una tal definizione è però difettosa, poichè in essa dicendosi, *cioè i triangoli, ed i parallelogrammi*, e poi parlandosi de' lati dintorno, a due loro angoli, pare che oltre di queste non vi sieno altre figure, che possan dirsi reciproche; il che non è vero. È perciò, che noi, convenendo col Simson nell' aver come corrotta la definizione di cui si parla, ne abbiamo data ne' nostri Elementi un' altra, che ci sembra soddisfare alle vere mire, che dovè avere Euclide in definire le figure reciproche, come più giù faremo vedere.

Intanto il Simson par che sia restato anche poco

contento della sua definizione quassù rapportata; poichè nelle Note vi sostituisce quest'altra. » Due grandezze » si dicono essere reciprocamente proporzionali a due » altre, allorchè una delle prime sta ad una dalle se- » conde, come la rimanente di queste alla rimanente » di quelle ». Ma una tal definizione non è al certo secondo la mente di Euclide, ed è poi poco concludente. È poco concludente; poichè qual ragione vi sarebbe di considerare una reciprocanza tra le grandezze costituenti due ragioni, quando in esse vi si contiene anche l'uguaglianza delle ragioni dirette, cioè una proporzione ordinaria. Imperciocchè se A.B,C,D sieno queste quattro grandezze disposte coll' ordine che si vede, niente può impedire, che si dica A : B :: D : C, e che quindi la proporzione, che si voleva considerare come reciproca diventi diretta. La definizione dunque delle grandezze reciproche sarebbe senza scopo, e nullo il concetto di essa. Quindi si rileva, che solamente dall'idea di reciprocanza nelle figure si possa ricavar quella della reciprocanza de'termini di una proporzione, che ha luogo in esse.

Di più il luogo ove si trova presso Euclide una tal definizione, cioè dopo quella delle figure simili, ci mostra chiaramente, che l'idea di reciprocanza siasi da questo Geometra adattata specialmente alle figure. E volendo egli che una tal nozione non si appartenesse esclusivamente alle figure piane; perciò rese generale l'ennunciazione di questa definizione. È poi anche manifesto, che se Euclide avesse voluto parlare di reciprocanza di grandezze, e non di figure, avrebbe dovuto porre una tal definizione piuttosto nel Lib. V. dopo la definizione della proporzione, che nel Lib. VI. dopo la definizione delle figure simili. Si riscontri anche al proposito di questa Def. 2. del Lib. VI. la nota alle Proposizioni 14., e 15. di un tal Libro.

Alla Prop. II.

Questa Proposizione può aver tre casi, potendo la parallela alla base del triangolo incontrare gli altri due lati di questo o al di sopra della base, o al di sotto di questa, o anche al di là del vertice del triangolo. Siccome però la dimostrazione per essi è sempre la stessa, non abbiamo perciò creduto necessario di gravare il testo con tal distinzione.

Alla Prop. III.

Dopo il presente Teorema il Simson ne ha aggiunto un altro, che forma con esso una sola teorica, e del quale Pappo Alessandrino si serve, come di una verità Elementare, nella Prop. 39 del Lib. VII. delle sue Collezioni Matematiche: noi però, siccome di esso non si fa uso negli Elementi, e che quindi non è necessario al nesso geometrico di questi, abbiamo creduto miglior consiglio di riportarlo in fine del suddetto Libro VI, nell' Addizione appostavi.

Alla Prop. VII.

Roberto Simson a'due casi compresi nell' enunciazione della presente proposizione, cioè che *i rimanenti due angoli fossero o acuti, o ottusi*, ne ha aggiunto un altro, in cui *poste le altre cose dell' ipotesi, uno de' rimanenti due angoli fosse retto*: siccome però di questo caso non si ha bisogno negli Elementi, così abbiamo creduto superfluo l' aggiugnervelo, anche perchè in siffatto caso i triangoli si dimostreranno equiangoli, e quindi simili nel modo stesso che pel secondo

caso, in cui i rimanenti due angoli si supponevano ottusi.

ALLA PROP. VIII.

Il Simson crede, che qualche antico Comentatore di Euclide abbia dovuta alterare la dimostrazione di questo Teorema. Imperciocchè in essa dopo essersi dimostrato, che i triangoli sieno equiangoli tra loro, si dimostra particolarmente, che i lati intorno gli angoli uguali sieno proporzionali; quasi che ciò non si fosse gia fatto nella Prop. 4 di questo Libro. Soggiugne di più, che queste cose, ch' egli reputa superflue, che perciò le ha omesse, come anche noi abbiamo fatto, non si trovano nella versione dall' Arabo.

ALLA PROP. IX.

La soluzione di questo Probl. è fatta, nel Testo Greco, in un caso particolare, supponendosi, cioè, che si voglia tagliare dalla linea retta data la terza parte, sembra perciò, ch'essa non sia di Euclide. Inoltre si assume nella dimostrazione, che in quattro grandezze proporzionali, la terza sia tanto multiplice della quarta, quanto la prima della seconda, la qual cosa non si trovava affatto dimostrata nel Lib. V. Ma noi ad imitazione del Simson abbiamo resa generale la soluzione di questo Problema; ed abbiamo stabilita nel Lib. V. la prop. B, dalla quale, per mezzo del permutando, si ricava la verità poc'anzi detta.

ALLE PROP. XIV. E XV.

Le enunciazioni di queste due proposizioni erano state certamente guastate dai Comentatori antichi; poichè in esse non si faceva affatto menzione di figure re-

ciproche, come era per altro necessario. E da ciò fu indotto il Simson nell'equivoco di credere, ch' Euclide non avesse mai parlato di reciprocanza di figure. Un tal equivoco però svanisce interamente, quando le ennunciazioni di queste due Proposizioni sieno fatte come si vede ne' nostri Elementi.

Alla Prop. XVIII.

Con ragione crede il Simson, che questa Proposizione sia stata viziata. Imperciocchè la costruzione vi è fatta solamente pe' quadrilateri; nè poi si dice come si possa estendere ai rettilinei di cinque, o anche di maggior numero di lati. Inoltre nella dimostrazione di essa dovendosi considerare i triangoli simili, che costituiscono questi rettilinei, si conchiude, che un lato dell' uno stia al lato omologo dell' altro, come un altro lato del primo all'omologo del secondo, il che è tanto contro la mente di Euclide, che nella Prop. 19. avendo questo Geometra bisogno di una proporzione di tal fatta tra i lati omologhi di due triangoli simili, è ricorso al permutando. Similmente viziosa è la conchiusione; poichè i lati dintorno agli angoli di un rettilineo, non si dimostrano proporzionali ai lati dintorno agli angoli respettivamente uguali dell' altro rettilineo; ma si paragona sempre un lato di un rettilineo col suo omologo nell'altro. Ci è dunque sembrato conveniente di esporre la dimostrazione di questa proposizione alla maniera Euclidea, cioè nel modo stesso, che si ravvisa nella Prop. 20. di questo Lib.; e di determinarla alle figure pentagone, affinchè più agevolmente si rilevasse il modo da estender la soluzione, e la dimostrazione di una tal proposizione alle figure di un maggior numero di lati.

Al Cor. I. della Prop. XX.

Euclide dopo di aver dimostrato nella Prop. 19., che i triangoli simili sono in duplicata ragione de' loro lati omaloghi, dimostra nella 20, che i poligoni simili sieno pure in duplicata ragione de' lati omologhi. Or siccome egli sotto il nome di figure moltilatere, o poligone, aveva comprese le figure da cinque lati in poi, pareva dunque che in questa proposizione non si comprendessero le figure quadrilatere; quindi è che soggiugne nel corollario di tal Prop. 20.: » Nel mo» do stesso si dimostrerà, che i quadrilateri simili, sie» no in duplicata ragione de' lati omologhi ». E dopo ciò riunendo in una sola enunciazione la 19 la 20, e quello che poc' anzi aveva detto nel corollario, soggiugne. » In generale dunque le figure rettilinee simili » sono in duplicata ragione de' lati omologhi ».

Alla Prop. XXII.

In questa proposizione verso la fine della seconda parte si assume, che i lati omologhi di due rettilinei uguali simili e similmente posti sieno ugnali tra loro; il che poi si trova dimostrato nel testo greco, e presso tutti i comentatori di Euclide, eccetto che dal Simson, in un lemma che segue la 22. Non pare però che ve ne sia bisogno, nè che tal lemma sia di Euclide. Imperocchè se questo accurato Goometra avesse voluto in tal luogo dimostrare l' enunciata verità, non avrebbe dovuto tralasciare di far lo stesso nel libro primo, e dimostrare, che i *quadrati uguali hanno lati uguali*, come il Commandini ed il Clavio hanno fatto, seguendo Proclo. Or se Euclide assunse nella 48. del Lib. I. il poc' anzi detto principio, come abbastanza

chiaro, perchè facile a rilevarsi, per mezzo della sopraimposizione; perchè non doveva poi permettersi di assumere anche l'altra verità identica di cui si serve nella 22 del Libro VI., e che può similmente dimostrarsi?

Il trovarsi poi contro l'ordine geometrico posposto un tal lemma alla prop. 22, in cui se ne ha bisogno, mostra chiaramente, ch' esso non sia di Euclide; ma che vi sia stato aggiunto da Teone, o da altri come Scolio, che fu poi dagli amanuensi ridotto nel testo.

Inoltre la maniera come un tal lemma è dimostrato mostra che non sia di Euclide; mentre dal porsi, che i lati omologhi intorno a due angoli corrispondenti di que' rettilinei sieno disuguali, si conchiude immantinente la disuguaglianza de' poligoni proposti; la qual conseguenza equivale alla proposizione di supporre uguali i lati, essendo uguali i poligoni.

Alla Prop. XXIII.

In questa proposizione Euclide la prima volta fa menzione della ragion composta, ed in essa intanto, come accennammo nella nota alla def. A del Lib. V, non si fa affatto uso della definizione di Teone; ma chiaramente si adopera quella da noi data: poichè si dice: » Ma la ragione di K ad M è composta dalle » ragioni di K ad L, e di L ad M. » Quindi la definizione di Teone è inutile, e del tutto assurda.

fig. 162.I. Posta la nostra definizione A del Lib. V., una tal proposizione si poteva anche più brevemente dimostrare nel seguente modo.

Fatto lo stesso apparecchio, che nella Prop. 23, il parallelogrammo AC sta all' altro CF in ragione composta dalla ragione di AC a DG, e dall' altra di DG a CF. Ma il parallelogrammo AC sta all' altro DG

come BC a CG * : ed il parallelogrammo DG sta pure all' altro CF, come DC a CE: adunque il primo parallelogrammo AC starà al terzo CF in ragion composta da quelle di BC a CG, e di DC a CE, cioè dalle ragioni dei lati. Intanto noi abbiamo preferita la dimostrazione Euclidea sebbene più lunga; poichè in questa, e non già nella poc'anzi recata, si fa vedere in qual modo si possa esibire la composta dalle ragioni dei lati de'parallelogrammi, cioè la ragione di queste figure, il che era necessario ad apprendersi dai Giovani, affinchè in simili casi sapessero ridurre due, o più ragioni date alla forma convenevole, onde poi poterne esibire la composta. Bisogna anche avvertire, che l'enunciazione di questa proposizione in tutti gli originali di Euclide è erronea; perchè in essa si dice, che la ragione de' parallelogrammi *è composta dai lati*, invece di dire *dalle ragioni de' lati*.

* 1. VI.

Alla Prop. XXIV.

Giudiziosamente osserva il Simson a proposito di questa proposizione, che qualche ignorante abbia riunite due diverse dimostrazioni, che forse vi erano negli Elementi, e formatane così quella, che ora vi si legge. Imperciocchè si trova in questa dimostrazione rilevato, per mezzo della Prop. 2. del presente libro, e col componendo, e permutando, che i lati dintorno all'angolo comune dei parallelogrammi sieno proporzionali: e poi in vece di dedursi da ciò immediatamente esser anche proporzionali i lati dintorno ai rimanenti angoli, servendosi della Prop. 34 del Lib. I, e della 7 del V, si continua con un lungo giro a dimostrare, che i triangoli, ed parallelogrammi sieno equiangoli, per mezzo della Prop. 4. di questo Libro., e della 22 del V. Seguendo dunque il Simson noi ne abbiamo data

una dimostrazione semplice, per mezzo della poc' anzi detta Prop. 4, e ch'è precisamente la stessa, che s' incontra ne' codici Arabi, ne' quali però non vi è indicato il permutando, nè si trova dimostrato, che i parallelogrammi sieno equiangoli: il che doveva farsi.

Alla Prop. XXV.

Si vede chiaramente, che la dimostrazione che diede Euclide di questa proposizione sia stata viziata da qualche ignorante editore. Poichè in essa, dopo di essersi fig. 164. I. dimostrato » che come il rettilineo ABC al rettilineo KGH, così stia il parallelogrammo BE al parallelogrammo FE » si avrebbe subito dovuto soggiugnere, come si è fatto in questi Elementi »: Ma il rettilineo ABC è » uguale al parallelogrammo BE; dunque anche il ret» tilineo KGH sarà uguale al parallelogrammo EF » cioè la conchiusione avrebbe dovuta farsi per la 14 del Lib. V. Intanto nel Testo Greco si trova dopo il primo passaggio « e perciò permutando, come il rettili» neo ABC al parallelogrammo BE, così il rettilineo » KGH al parallelogrammo EF ». Vale a dire, che colui il quale supplì questo passaggio stimò, che non fosse tanto chiaro il conchiudere, che la seconda di quattro grandezze proporzionali fosse uguale alla quarta, quando la prima sia uguale alla terza, il che si è dimostrato nella 15 del Lib. V; quanto il conchiudere, che la terza pareggiasse la quarta dall' essere uguali la prima, e la seconda, il che non s'incontra mai nè dimostrato, nè assunto negli Elementi che abbiamo. Ma di più, ancorchè questa verità da noi stabilita nella prop. A del Lib. V, fosse stata da Euclide inserita ne' suoi Elementi, come l' è verisimile, egli nè pure se ne sarebbe servito nel caso presente; poichè apparisce chia-

ramente da ciò che si è detto, che la stessa conseguenza si può ottenere senza questa ridondante permutazione di quantità proporzionali. Il Simson, e noi ci siamo fermati su di ciò un poco più a lungo di quello che forse pareva conveniente; primieramente perchè da un simile incidente può trarsi un manifesto indizio, che il Testo di Euclide sia stato viziato; mentre nel Testo Greco s' incontra lo stesso errore nella Prop. 23. del Lib. XI. due volte, e due volte nella Prop. 2. del Lib. XII., ed anche nelle Prop. 5, 11, 12, 18 di questo stesso Libro; ed il Keill nella sua edizione dell'Euclide del Commandini accortamente tralasciò questa permutazione di quantità proporzionali in tutti i luoghi citati del Lib. XII., eccetto che nell'ultimo. Ed in secondo luogo, affinchè i Geometri si guardino dall'usar la permutazione in simil caso; mentre spesse volte i moderni, e tra gli altri lo stesso Commandini nel comentario alla Prop. 5. del Lib. III. delle Collezioni Matematiche di Pappo, ed anche in altri luoghi, sono caduti in questo errore. E da ciò potrà anche dedursi, che la verità da noi stabilita nella suddetta prop. A sia talmente connessa coll'idea di proporzionalità, che abbia fatto sin deviare accorti Geometri dal vero rigore.

Alle Prop. XXVIII., e XXIX.

Esaminando con attenzione la construzione di Euclide per questi due Problemi, sarà facile il rilevare che pel Problema risoluto nella Proposizione 28. il punto P, e quindi l'altro S cercato nella retta AB fig. 168. I. dipenda dall' adattare nel triangolo EGB dato di specie e di grandezza (perchè costruito sulla data retta EB, e tale che il parallelegrammo EF, doppio di quel triangolo è simile al dato D) una parallela PX alla

base EB, sicchè tronchi dal triangolo il trapezio PBEX dato, cioè quanto la metà del dato rettilineo C. Similmente nell'altro Problema risoluto nella 29., il pun-
fig 169.I. to X, e quindi l'altro O nella AB prodotta, il quale soddisfa alle condizioni di tal Problema si otterrà, applicando tra i lati BF, FE prolungati del triangolo FBE la retta NX parallela alla base EB in modo, che si aggiunga a quel triangolo il trapezio BENX dato, cioè quanto la metà del dato rettilineo C. E dal già detto è facile il conoscere, che le soluzioni de' due sopraindicati Problemi si comprendano nella sola seguente.

PROBLEMA.

Applicare tra due lati di un triangolo dato una linea retta parallela alla base, la quale ne tronchi, o vi aggiunga un trapezio uguale ad un rettilineo dato.

fig. 3. N. Sia ABC il triangolo dato, ed X il dato rettilineo, fa d'uopo applicare tra i lati AB, AC di esso triangolo una linea retta parallela alla base, la quale ne tronchi, o vi aggiunga un trapezio uguale al dato rettilineo X.

Sopra la base BC del triangolo dato, e nell'angolo ABC si costituisca il parallelogrammo BF uguale al ret-
* c.45.I. tilineo dato X*, e poi presa DG uguale a DB, tra le
* 13. VI. BA, AG si ritrovi la media proporzionale AH*, e per H si tiri HK parallela a BC: dico che sia HBCK il trapezio che si vuol troncare dal triangolo ABC.

Si congiunga GC. Ed essendo continuamente proporzionali le tre linee rette BA, AH ed AG; sarà BA ad
c.19.VI. AG, come il triangolo BCA all'altro HKA. Ma è poi
* 1. VI. BA ad AG, come il triangolo BCA all' altro ACG*. Dunque sarà il triangolo BCA all'altro HKA, come lo stesso BCA all' altro GCA; e quindi le loro differenze

dal triangolo BAC saranno pure uguali; cioè il trapezio BHKC sarà uguale al triangolo GCB. Ma questo triangolo è uguale al parallelogrammo CD, poichè sono racchiusi tra le stesse parallele, e la base del triangolo è doppia di quella del parallelogrammo*; ed un tal parallelogrammo è uguale al rettilineo X: quindi anche il trapezio BHKC sarà uguale al rettilineo X.

* 41. I.

Che se si voglia aggiugnere al triangolo ABC un trapezio uguale al dato rettilineo X, tirando tra i suoi lati AB, AC una retta parallela alla base.

Si applichi alla base BC del triangolo dato il parallelogrammo Bf uguale ad esso rettilineo X, nell'angolo CBg conseguente dell'altro CBA*: indi si prenda la dg uguale alla dB, e tra le BA ed Ag si trovi la media proporzionale hh* Finalmente per lo punto h si tiri hk parallela a BC, sarà hBCk, il trapezio cercato.

* a45. I.

* 13. VI.

La dimostrazione è identica a quella del caso precedente.

Scol, I. Si vede bene, che il presente problema contenga in se evidentemente la determinazione del primo caso esibita da Euclide a parte nella Prop. 27. non potendosi proporre a troncare dal triangolo un trapezio, che ne sia maggiore.

*Scol.*II. Nelle prime due edizioni di queste Note avevamo a dirittura soppresse le proposizioni 28, 29 ed anche la 27, ch'è lemma alla 28, sostituendovi la loro equivalente poc' anzi recata, e ciò a fine di togliere quell' oscurità ed implicanza delle loro enunciazioni, ed anche perchè in quest' altro modo rendevansi con maggior eleganza le soluzioni della 28 e 29 unitamente, e di più rispasmiavasi la 27. Ma i troppo Euclidei rispondevano a ciò, che non sono queste bastanti ragioni da alterare il Testo; e noi per togliere ogni lite le abbiamo perciò restituite, come da Euclide furono esposte, anche perchè veramente è in questo modo e non in quello come noi le avevamo ridotte, e

che si è poc' anzi esposto, ch' esse si trovano continuamente applicate nelle opere geometriche degli antichi. Abbiamo però dilucidate le enunciazioni loro, ed termini tecnici che vi si usano. Intanto avendo stimato che non meriti di cadere interamente in obblio una tal nostra riduzione l' abbiamo qui recata, ed or mostreremo, come facemmo nelle passate edizioni, in qual modo servendosi di questa riduzione si possa risolvere il seguente.

PROBLEMA.

Dividere una data linea retta terminata in estrema e media ragione.

Fig. 4. N. Sia data la linea retta terminata AB: fa d' uopo dividerla in estrema, e media ragione.

Dalla AB si descriva il quadrato AC, il cui lato AD, ch'è ad angolo con la AB, si divida per metà in E: si descriva dalla AE l'altro quadrato EN, e si congiunga FA. Ciò posto i lati EF, FA del triangolo EFA si prolunghino in K ed in H, e tra essi si adatti la linea retta KGH parallela ad EA, sicchè il trapezio ADKH pareggi il parallelogrammo EB*: dico che la linea retta AB resti divisa in estrema e media ragione nel punto G; cioè che stia BA ad AG, come AG a GB.

* p. prec.

Si compiscano le figure LM e KO. E poichè il parallelogrammo EN, e l'altro GM consistono intorno al diametro stesso col quadrato KO; perciò ciascuno di essi EN, GM sarà anche un quadrato*. Or il trapezio AEKH è uguale al parallelogrammo AP, toltone di comune AK, resterà il triangolo AGH uguale al parallelogrammo GP; e prendendone i doppj, sarà GM, cioè il quadrato di AG, uguale a GC ch' è doppio di GP,

* 24. VI.

essendo BP uguale a PC*. Laonde BC o AB starà ad AG, come AG a GB*. C. B. F. * 35. I. * 14. VI.

Dopo tutto il fin qui esposto, sembra questo il luogo a proposito da potervi inserire le nostre seguenti considerazioni sull'importanza ed uso, presso gli antichi, de' suddetti Problemi, e paragonarli ad alcune ricerche analoghe de'moderni; dal che si vedrà pure con quanto poco avvedimento taluni espositori degli Elementi di Euclide, tra i quali il Tacquet, ed il Dechales, gli abbiano banditi dalle loro opere, riputandoli inutili; e sembrandoli anzi, che que'Problemi interrompessero la catena geometrica stabilita da Euclide ne'suoi Elementi, per non vederli in questi immediatamente applicati ad altre Proposizioni che alla 30, la quale per altro poteva risolversi riducendola alla 11 del Libro II.

Il Cartesio, al di cui penetrante ingegno la Geometria Analitica debbe presso i moderni professar tutto l'obbligo, per averla egli fondata, dopo di aver date, nel Libro I. della sua così detta Geometria, elegantissime costruzioni geometriche delle equazioni di secondo grado, si permise di adontare la sapienza de' nostri primi maestri, dicendo » ch'egli non credeva che gli antichi » avessero avvertito, che tutti i Problemi della comu» ne Geometria (intendendo con ciò quelli che si chiamavano *piani* dagli antichi, e da noi *di primo e di secondo grado*) » si potessero costruire *riducendoli* » *a costruzioni generali e semplicissime*, poichè altri» menti essi non avrebbero sostenuta tanta fatica in » comporre tanti libri, ne' quali anche il solo ordine » delle Proposizioni ci dimostra, che ad essi non fu » noto il vero metodo di ritrovarle tutte; ma che sola» mente raccolsero quelle nelle quali s'imbatterono (*) ».

(*) *Caeterum possunt hae ipsae radices infin itis ferme aliis mo-*

Ma qui per istruzione de' giovani ci sia permesso di contraddire al sentimento di sì grand' uomo. E da ciò si vedrà, per servirmi dell'espressione del suo compatriota Fermat, sommo anch'egli e grandemente versato nelle cose geometriche: *Cartesium in Geometricis etiam hominem esse* (*).

E primieramente faremo rilevare che gli antichi conobbero più generalmente questo metodo di costruzione universale de' *Problemi piani* corrispondenti a quelli da noi detti di 2° grado; e ch'egli poteva facilmente dalle vie da quelli tenute dedurre il suo metodo in costruirli. In fatti noi rileviamo dalle loro opere, ch'essi avevano per elegantemente risoluto un problema del suddetto genere, allorchè lo riducevano ad uno de' due risoluti da Euclide nelle due Proposizioni che a bella posta egli recò per elementari nel Libro VI.; e de' quali problemi lo stesso Geometra antico recò poi l'Analisi Geometrica in due Teoremi de' Dati, che sono il 58 e 'l 59 del suo importantissimo Libro ove trattò espressamente di questa principalissima ed essenzial parte del *Luogo di Risoluzione*. Molti esempj di tal genere di riduzioni esistono nelle Opere restateci degli antichi; e molti di più ne avremmo ravvisati ne' Libri *de Sectione Spatii*, e *de Sectione determinata*, se queste

---

dis inveniri; sed praedictos tantum in medium afferre volui, velut admodum simplices, ut hac ratione pateat Problemata omnia Geometriae communis construi posse, faciendo tantum ea pauca, quae quatuor praecedentibus figuris exposui. Quod quidem non credo a veteribus fuisse animadversum, cum alias laborem ea de re tantos libros conscribendi non suscepissent, in quibus vel solus ordo propositionum satis nobis ostendit, quod non ipsis constiterit vera ratio inveniendi omnes, sed quod solummodo collegerint illas, in quas forte inciderunt.

(*) *Fermat Opera Varia*. pag. 110.

opere importanti fossero pervenute fino a noi, come ci è facile ad argomentarlo dalle divinazioni che dotti Matematici Moderni ne hanno date. Ma ritorniamo al nostro argomento per mostrare che i suddetti due Problemi contengono evidentemente la costruzione moderna delle equazioni di secondo grado.

Nel primo di essi si dimanda di: *Applicare ad una linea retta data un parallelogrammo uguale ad un dato rettilineo, deficiente per un parallelogrammo simile ad un altro dato*: e che altro mai è questo Problema se non, in termini generalissimi, la costruzione dell' equazione $x^2-ax+b^2=0$. Di fatti suppongasi che il parallelogrammo da applicarsi fosse rettangolo, ed un quadrato quell' altro cui deve esser simile il difetto di esso da quello applicato sulla retta data AB espressa con a: chi non vede che l' espressione algebrica dinotante il rettangolo da applicarsi, supponendo essere AC la base di tal rettangolo, e quindi CB l' altezza, ed esprimendo quella per x, e quindi questa per $a-x$, sia $ax-x^2$: che perciò indicando per b lo spazio al quale deve esso rettangolo farsi uguale, resterà l' enunciazione di quel Problema trasformata algebricamente nell'equazione $ax-x^2=b^2$, ossia $x^2-ax+b^2=0$; donde apparisce che la soluzione di quel Problema sia lo stesso che la costruzione geometrica di questa equazione. E chi non ravvisa pure a tal proposito l'infinita sapienza degli antichi, e di Euclide nella maniera com'essi seppero geometricamente esprimere i casi impossibili di questo Problema, che tradotta in nostro linguaggio algebrico diventa assolutamente quella espressione stessa di cui ci serviamo ne' Corsi ordinarj di Analisi Moderna, per far rilevare tali casi. Similmente si potrà vedere, che l' enunciazione della Prop. 29 sia l' espressione geo-

fig. 5. N.

metrica dell' equazione $x^2 - ax - b^2 = o$, o dell' altra $x^2 + ax - b^2 = o$, secondo che si ponga uguale ad x la BC, o pure la AC, quando il parallelogrammo da applicarsi diventi un rettangolo, ed un quadrato quell'altro di cui deve essere eccedente. Laonde non v' ha dubbio alcuno che la costruzione geometrica che il Cartesio dà de' diversi casi delle equazioni di secondo grado contiensi manifestamente in quella de' Problemi risoluti da Euclide nelle Prop. 28 e 29 del VI°. Libro de' suoi Elementi.

fig. 6 N.

Ciò posto, allorchè il parallelogrammo da applicarsi alla data linea retta AB è un rettangolo, ed esso deve esser deficiente o eccedente per un quadrato, si dovrebbe nel primo di questi casi, secondo la costruzione Euclidea della Proposizione 28., descrivere dalla EB metà della AB, il quadrato EGFB; e poi nell' angolo G di questo adattare l'altro quadrato GXPO uguale alla differenza del quadrato EF e del rettilineo C, che può dinotarsi pel quadrato della retta Y; si otterrebbe così il punto S nella AB, il quale soddisfa alla condizione del Problema, essendo il rettangolo di AS in SB il cercato. Or chi non vede, che in questo caso descrivendosi sulla AB il semicerchio AGB, si verrebbe ad avere il quadrato di QS uguale al rettangolo di AS in SB, e quindi uguale al dato quadrato della Y; sicchè il Problema in tal caso si riduce ad applicare in questo semicerchio la semiordinata SQ uguale ad Y; ch' è precisamente la costruzione Cartesiana. Inoltre, nell' altro caso, la costruzione Euclidea consiste in descrivere sulla EB metà della AB il quadrato EL; e poi in applicare nell' angolo F di questo l'altro quadrato NM uguale alla somma del quadrato EL e di quello di Y, il quale si suppone pareggiare il dato rettilineo C; donde ne risulta nella AB

fig. 168 I. e 7 N.

fig. 169 I. ed. 8. N.

prolungata il punto O soddisfacente al Problema; sicchè il rettangolo AOB sarà quello che si voleva applicare. Or è facile il vedere che in questo caso i lati di tal rettangolo siano uno la somma della metà di AB, e del lato del quadrato ch' è somma di quelli che si descrivono dalla metà della retta data AB e da Y, e l'altro sia la differenza di queste stesse rette: dal che anche chiaramente risulta l' altra costruzione Cartesiana per le equazioni di secondo grado comprese in questo caso. E da ciò conviene conchiudere, che gli Antichi lungi dal non aver ridotto a regole generali la costruzione de' Problemi Piani di secondo grado, un tale argomento trovasi anzi da essi trattato negli Elementi in una maniera universalissima, e tale che da questa immantinente si ricava la costruzione che ne ha data Cartesio.

E qui non vogliamo tralasciare di aggiugnere al fin ora esposto ciò, che con moltissima avvedutezza e conoscenza in Geometria disse il sommo Geometra Inglese Edmondo Halley nello Scolio alla Proposizione 16. del Libro VIII. de' Conici di Apollonio Pergeo da lui restituito: *Veteribus Geometris, ac speciatim Apollonio nostro mos erat Problemata plana pro resolutis habere postquam rem eo deduxerant, ut rectangulum dato rectangulo aequale sub lateribus quaesitis construeretur, quorum summa, vel differentia datae rectae aequalis fuerit. Hoc autem docet Euclides in 28. et 29. Elementi Sexti, monstrando quo pacto applicandum sit parallelogrammum datum ad rectam datam, quod excedat, vel deficiat parallelogrammo cuivis dato simili. Cujus quidem rei generalissime propositae casus sunt particulares, applicare rectangulum vel quadratum ad rectam datam quod excedat, vel deficiat quadrato: hujusque effectiones postulant Geometrae Euclide posteriores.* E dopo ciò egli, attento che questi compendj accennati delle

Proposizioni generali di Euclide *occorrono frequentemente nella risoluzione de' Problemi*, passa a darne eleganti soluzioni, come faremo anche noi qui appresso, e per la stessa ragione poc'anzi detta, dopo di aver però recato un altro luogo dello stesso Halley ricavato dallo Scolio in fine del I°. Libro di Apollonio Pergeo *de Sectione Rationis*, e che molto si confa al nostro assunto. Un tal luogo è il seguente: *Utriusque autem applicationis effectionem* (cioè quella di un rettangolo ad una retta, deficiente o eccedente di un quadrato), *docet Euclides in* 28. *et* 29 *Prop. Elem. VI. quarum ope construxere Veteres problemata omnia plana ad has duas formulas redacta; nempe ut cognita dati rectanguli summa vel differentia laterum, invenirentur latera sigillatim. Ac sane pro resoluto habebatur apud eos omne problema, postquam ad harum alteram perductum erat: ut vel ex hoc Libro, et ex Pappo videre est. Unde subest mirari haec duo Problemata generalissime ab Euclide constructa, a Tacqueto, Chalesio eorumque asseclis, ut inutilia, nulliusque momenti rejici, nec commentario digna censeri. Etenim si loco parallelogrammi dati, applicetur rectangulum ad rectam datam, quod deficiut vel excedat quadrato, loco figurae parallelogrammae speciae datae; (cum rectangula et quadrata etiam parallelogramma sint) res nimis manifesta est quam ut ulteriore indigeat explicatione. Coincidit autem cum vulgata aequationum quadraticarum (uti nunc loquimur) effectione: quae quidem commodissime fit ad hunc modum.* Ma ecco qui, come abbiamo promesso la soluzione di que' due Problemi generali proposti da Euclide, ne' casi loro particolari, a' quali specialmente riduconsi in ultimo limite i Problemi piani di secondo grado.

PROP. I. PROBL.

Applicare ad una data linea retta un rettangolo deficiente di un quadrato, ed uguale ad un quadrato dato.

Sia AB la linea retta, e'l rettangolo da applicarsi debba essere uguale al quadrato della data linea retta C; e per la determinazione del Problema non sia questo quadrato maggiore di quello che si descrive dalla metà della AB. fig 9.N.

Si bissechi la AB in D; e se il quadrato della AD fosse uguale a quello di C, si sarà ottenuto ciò che si cercava. Ma se ciò non è, dovrà, per la determinazione, essere il quadrato di AD maggiore di quello di C. Si tiri la DE perpendicolare alla AB, ed uguale a C, si prolunghi la DE in F, finchè la EF sia uguale ad AD o DB, e poi col centro E intervallo EF si descriva il cerchio, il quale seghi la AB in G, e dalla GB si descriva il quadrato GBKH, e si completi il rettangolo AGHL: finalmente si unisca la EG. E poichè la AB è bissecata in D, sarà il rettangolo di AG, GB insieme col quadrato di DG uguale al quadrato di DB*, o a quello di EF, o di EG; e perciò a quelli di ED, DG: che perciò tolto di comune il quadrato di DG, resterà il rettangolo di AG, GB uguale al quadrato di ED, ossia di C. Ma il rettangolo di AG, GB è il rettangolo AH, perchè GH è uguale a GB. Laonde il rettangolo AH è uguale al quadrato di C, ed è deficiente dal rettangolo AK applicato all'intera AB pel quadrato GK. C. B. F.

* 5. II.

PROP. II. PROBL.

Applicare ad una data linea retta un rettangolo eccedente di un quadrato, ed uguale ad un quadrato dato.

fig. 10. N. Sia AB la linea retta data, e C il lato del quadrato al quale deve essere uguale il rettangolo da applicarsi ad essa.

Si bissechi la AB in D, si tiri BE perpendicolare ad AB, ed uguale a C, e si unisca la DE: poi col centro D intervallo DE si descriva il cerchio, che intersechi la AB prolungata in F, G; dalla BG si descriva il quadrato BGHK, e si completi il rettangolo AGHL. E perchè la AB è bissecata in D, e prolungata in G, il rettangolo di AG, GB insieme col quadra- * 6. II. to di DB sarà uguale al quadrato di DG*, o a quello di DE, o a' quadrati di DB, BE: laonde tolto il comune quadrato di DB, resterà il rettangolo di AG, GB uguale al quadrato di BE, o sia a quello di C. Ma il rettangolo di AG, GB è il rettangolo AH, essendo GH uguale a GB: Adunque il rettangolo AH è uguale al quadrato di C; ed è applicato alla linea retta AB, eccedente pel quadrato BH. C. B. F.

Per poco che si rifletta sulle due precedenti soluzioni si troverà ch'esse sono identiche respettivamente a quelle della 28 e 29 recate da Euclide; e solamente trovasi in queste la costruzione del Problema proposto elegantemente espressa, adattandola giusto al caso in quistione, e non già ricavandola dalla generale. Ma per completare questo argomento recheremo qui in due altri Problemi due altri casi di quegli stessi Problemi generali, ne' quali supponesi che la

quantità data sia un rettangolo e non già un quadrato; il che corrisponde alla costruzione geometrica delle equazioni

$$x^2-ax+bc=0$$
$$x^2-ax-bc=0$$

che a taluni analisti è anche piaciuto ne' loro Corsi di questa Scienza di costruire prima di ridurre il terzo termine a quadrato. Le soluzioni che recheremo si appartengono al Geometra Olandese Willebrordo Snellio.

PROP. III. PROBL.

Applicare ad una data linea retta un rettangolo uguale ad un rettangolo dato, e deficiente di un quadrato. Bisogna però che il rettangolo dato non sia maggiore del quadrato che si descrive dalla metà della data linea retta.

Sia AB la linea retta data, ed il rettangolo dato sia quello che si contiene dalle linee rette C, D, non maggiore del quadrato della metà di AB: bisogna applicare alla AB un rettangolo uguale a quello delle C, D, deficiente di un quadrato. fig. 11. N

Si tirino le AE, BF perpendicolari alla AB, e dalla stessa parte di essa, e si tagli AE uguale a C, e BF a D; si unisca EF e si bissechi in G; poi col centro G intervallo GE si descriva il cerchio che seghi la AE in H, ed unita la HF, si tiri per G la GK parallela alla HF, e la GL parallela alla AE, che seghi la AB in L.

E poichè l' angolo EHF nel semicerchio è uguale all' angolo retto EAB, saranno parallele le AB, HF. Ed essendo AH uguale a BF, sarà il rettangolo di EA, AH uguale a quello di EA, BF, cioè di C, D. E perchè le

EG, GF sono uguali tra loro, ed AE, LG, BF sono parallele, dovrà essere anche AL uguale ad LB; ed è EK uguale a KH; e il rettangolo di C, D, per determinazione non è maggiore del quadrato di AL metà di AB. Adunque il rettangolo di EA, AH non è maggiore del quadrato di AL, o sia di KG. Aggiuntovi di comune il quadrato di EK, sarà il quadrato di AK non maggiore de' quadrati di EK, KG, o sia del quadrato di EG, e la linea retta AK non sarà perciò maggiore della linea retta FG. Or se la linea retta GE sia uguale all' altra GL, il cerchio EHF toccherà la AB in L; ed il quadrato di AL sarà uguale al rettangolo di DA, AH o sia di C, D; che è ciò che si cercava. Ma se le EG, GL sieno disuguali, e perciò EG la maggiore, il cerchio LHE segherà la linea retta AB ne'punti M, N: si descriva dalla NB il quadrato NBOP, e si completi il rettangolo ANPQ. E poichè LM è uguale ad NL, ed AL si è dimostrata uguale ad LB, sarà AM uguale ad NB, ed il rettangolo di AN, NB uguale all'altro di NA, AM, ossia all' altro di EA, AH, ossia di C, D. Ma il rettangolo di AN, NB è il rettangolo AP, per essere PN uguale ad AB. Adunque il rettangolo AP è uguale al rettangolo di C, D, ed è applicato alla linea retta AB deficiente pel quadrato BP. C.B.F.

PROP. IV. PROBL.

Applicare ad una data linea retta un rettangolo uguale ad un altro dato, eccedente di un quadrato.

fig. 12. N. Sia AB la linea retta data, e C, D il rettangolo dato: si vuole applicare alla AB un rettangolo uguale a quello di C, D, eccedente di un quadrato.

Si tirino le AE, BF perpendicolari alla AB, a parti

opposte di essa, ed uguali respettivamente alle C, D. Si giunga EF, si bissechi in G; e col centro G, intervallo GE si descriva il cerchio che seghi AE in H; si unisca HF, e per G si tiri GL parallela ad AE: ed intersegando il cerchio la AB prolungata in M, N si descriva dalla BN il quadrato BNPO, e si completi il rettangolo ANPQ. Ed essendo l'angolo LGF nel semicerchio uguale al retto EAB, saranno parallele le AB, HF. E poichè sono uguali le AH, BF sarà il rettangolo di EA, AH uguale a quello di EA, BF, ossia di C, D. Ed essendo ML uguale ad LN, ed AL ad LB, sarà anche MA uguale a BN, ed il rettangolo di AN, NB sarà uguale a quello di MA, AN, ossia di EA, AH, o di C,D, Ma il rettangolo di AN, NB è per appunto AP. Laonde il rettangolo AP è uguale a quello di C, D, ed è applicato alla linea retta AB eccedente pel quadrato BP.C.B.F.

E queste due ultime costruzioni non sono anch'esse che eleganti modificazioni di quelle generali date da Euclide nella 28. e 29. del Lib. VI., come ognuno potrà facilmente rilevare.

Dopo ciò dovremmo noi ancora entrare in un'altra discussione su di una difficoltà promossa dal Montucla nella Nota al I.° Libro della seconda Parte della sua Storia delle Matematiche, cioè: *che gli pareva che gli antichi non avevano ne' due casi delle equazioni di secondo grado compresi nella 28. e 29. conosciuto il secondo valore della x*, avendo sempre impiegate quelle radici così espresse:

$$x=\frac{1}{2}b-\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2-a^2\right)}$$

$$x=\frac{1}{2}b+\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2+a^2\right)}$$

e non mai le altre due

$$x=\frac{1}{2}b+\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2-a^2\right)}$$

$$x=\frac{1}{2}b-\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2+a^2\right)}$$

ch'egli però conviene che sarebbe stato a quelli ugualmente facile il costruire, che le altre due. Ma non è questo il luogo per un tale esame, ed esso ci allontanerebbe moltissimo dal nostro scopo. Verrà tempo che noi tratteremo un tale assunto diffusamente.

Restaci ora a dire ancora qualche cosa contro l'imputazione falsa data dal Cartesio agli antichi Geometri, ch'essi avessero *trattati solamente que' Problemi ne' quali s' imbatterono*. Ma donde ha potuto mai essere egli indotto a profferire tanta bestemmia! Non è certamente questo quello che Pappo ci ha lasciato detto nell'Introduzione al Lib. VII. delle sue preziose Collezioni Matematiche, allorchè definisce il *Luogo di Risoluzione* essere: *una certa special materia che seguiva le ordinarie istituzioni elementari di Geometria, preparata per coloro che vogliono acquistar facoltà e forza nelle cose geometriche, onde risolvere i Problemi che loro si propongono*. Dunque perchè noi ignoriamo in massima parte i metodi ch'essi avevano per classificare i Problemi, e per conoscerne anche le diverse soluzioni, non essendoci pervenute le principali delle loro opere, in cui forse tali cose si contenevano; e forse perchè essi non le ridussero in trattati Didascalici, dovremo negar loro questa scienza? E non ci annunzia forse una estesa conoscenza su questo importante argomento l' altro luogo di Pappo nel Lib. IV. dopo la Prop. 30., ov' egli ci ha lasciato registrato, che gli antichi conobbero

che il Problema della trisezione angolare è *di natura* solido ; e dove ha parlato della triplice distinzione ch' essi fecero de' Problemi. La stessa estesa dottrina de' luoghi geometrici piani e solidi, che fu tanto coltivata fin da' primi tempi della Geometria presso i Greci, e che formavano parte principalissima del *Luogo di Risoluzione*, non è forse anche un argomento fortissimo della scienza diretta ch' essi ebbero per conoscere la natura de' Problemi, e 'l metodo come costruirli ? E tutti gli altri loro Libri del *Luogo di Risoluzione*, per talun de' quali un solo Problema ha formato un argomento geometrico completissimo, per la maniera come quelli lo hanno trattato, distinguendo i diversi casi, e le diverse disposizioni de' dati, non ci dimostrano anche abbastanza tal loro scienza ? Il negar dunque ad essi questa scienza diretta della natura, e della maniera di costruire i Problemi è un' offesa fatta all' evidenza ; e solamente possiamo noi pretendere di averli sorpassati nella maniera più facile onde assicurarci del grado di un Problema, e nell' esser sicuri di poter sempre senza stenti pervenire a tal metodo di costruirli, che comprende tutti in una formola sola.

Per conchiusione di tutto il fin qui detto, noi ci permetteremo di dire, che il Cartesio trasportato dalla forza del suo fervente ingegno, e quasi fatto per inventare, piuttosto che apprender da altri, nel legger le opere degli antichi si permise di percorrerle brevemente, che perciò fu verso questi ingiusto in più rincontri (*).

(*) Si legga a questo proposito anche ciò che intorno al problema *delle quattro rette* dice con molta saviezza il nostro Signor Fergola nella Introduzione al suo *Trattato Analitico de' Luoghi Geometrici*, e nella *Storia* delle Sezioni Coniche illustrate dal Giannattasio.

Alle dimost. delle Prop. XXVIII e XXIX

Per la soluzione della Prop. 28 si esige di determinare la differenza di due rettilinei, e la loro somma per quella della Prop. 29; il che ecco come si esegue. fig.13.N. Sieno A e B i rettilinei dati, ed A il maggiore, cui si costituisca l'ugual parallelogrammo DF: indi si applichi alla linea retta CD, e nell'angolo CDE, o pure nel suo conseguente CDh il parallelogrammo DG, o l' altro Dg uguale all'altro rettilineo B; sarà HF la differenza de'rettilici dati, ed hF la loro somma.

Alla Prop. XXX.

Se Euclide non avesse avuto bisogno della Prop.11. del Lib. II. nella costruzione della 10. del Lib. IV., l'avrebbe certamente tralasciata, e si sarebbe limitato a ritrarla come conseguenza dalla Prop. 30. del Lib. VI. Ma non potendo ciò aver luogo, non dovevasi al contrario ricavar questa come corollario da quella, a cagione della sua importanza, quando anche l'ordine tenuto da Euclide ne' suoi Elementi lo avesse permesso. Ecco una delle ragioni per le quali la divisione di una retta in estrema, e media ragione forma in questo Libro un Problema; e la divisione di una retta in modo, che il rettangolo della tutta in una parte pareggi il quadrato dell'altra parte, ne forma un altro nel Libro II, quantunque la quistione sia la stessa, diversamente espressa. Ma oltre a ciò Euclide ha voluto con la sua costruzione del Problema di dividere una retta in estrema, e media ragione, dare un saggio dell'uso importante della 29. del Libro VI. nella costruzione di alcuni Problemi.

Alla Prop. XXXI.

In questa dimostrazione vi si trovava tralasciata due volte l' inversione delle quantità proporzionali ; vi si è dunque supplita, affinchè la conchiusione si facesse convenevolmante, per mezzo della Prop. 24. del Lib. VI. Il che si era già avvertito dal Clavio, e dal Simson.

Alla Prop. XXXII.

Questa Proposizione, che a torto è stata bandita da alcuni, tra i quali è il Tacquet, dagli Elementi come inutile, ha un uso negli Elementi stessi, e propriamante serve alla Proposizione 17. del Lib. XIII.

Alla Prop. XXXIII.

Le parole » come quegli che sono posti a'centri » aggiunte in fine dell'enunciazione di questa Proposizione, nel Testo Greco, e ritenute da tutt' i principali Comentatori di Euclide eccetto che dal Simson, sono sicuramente aggiunte da mano imperita.

La seconda Parte di questa Proposizione poi non è di Euclide; ma un'addizione di Teone, come egli stesso lo afferma nel comentario alla Prop. 50. dell'Almagesto di Tolomeo.

AL LIBRO XI.

Alla Def. IX.

Una tal definizione è l'undecima del Lib. XI. di Euclide, e da noi si è dovuta tasportare in questo luogo per premetterla all'altra delle figure solide simili, in cui ne abbisognavamo. Ed in ciò non ci siamo discostati dal vero metodo di Euclide. In effetto nel Libro I. del Geometra Greco si trova la definizione dell' angolo piano premessa a quella delle figure rettilinee; quantunque in definir queste non si dovesse tener conto degli angoli. Perchè dunque non avrà dovuto Euclide serbare lo stesso ordine nel Libro XI.? E se questa def. del Lib. XI. si trova posposta a quella delle figure solide, abbiamo tutto il fondamento di credere esser ciò avvenuto per causa degli antichi espositori, i quali, come altre volte abbiamo fatto osservare, hanno in mille luoghi sconciato il Testo di Euclide. La nostra definizione è poi diversa un poco dalle due seguenti, che si trovano nel Testo Greco, e che ci sono sembrate alquanto oscure.

Solidus angulus est plurium quam duarum linearum, quae se se contingant, et non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel solidus angulus est qui pluribus quam duobus planis angulis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, et ad punctum constitutis.

Inoltre tal nostra definizione contiene anche espressa la condizione, che i lati dell' angolo solido sieno *linee rette*; il che non si trova indicato nelle definizioni attribuite ad Euclide, e che tutti i suoi comentatori hanno ritenute: e si sa che la Geometria non considera altri angoli solidi oltre questi.

Alla Def. X.

L'idea di similitudine delle figure non è un'idea che il geometra può far dipendere dalla definizione che ne dà; che anzi questa dev' esser modellata sulla nozione positiva che tutti hanno della simiglianza, cioè che due figure sieno simili, allorchè l'una è, per dire così, l'immagine dell' altra; e che quindi da tale stato si passi a quello di perfetta uguaglianza subito che due degli elementi omologhi della loro similitudine diventino uguali. Or la definizione delle figure piane simili che diede Euclide nel VI°. Libro degli Elementi è precisamente modellata su questi principj, come ognuno intende facilmente: non si vede però del pari questa stessa precisione osservata nella definizione delle figure solide simili, ch'è la 9. dell' XI° Libro di Euclide (*), e dalla quale non solamente non si rileva la congruenza della nozione che vi si assegna di tali figure co'principj finora stabiliti, su quali deve esser necessariamente fondata; ma non v'è inoltre quella necessaria correlazione colla definizione delle figure piane simili, com'era necessario, perchè una sola e non due diverse fossero le nozioni di simiglianza geometrica. Forse Euclide, se pur sua è tal definizione, e non di altri che a quella ch'egli diede l' hanno sostituita, credè che posta la similitudine de'piani delle figure solide simili, era superfluo il soggiugnervi l' uguaglianza degli angoli corrispondenti, poichè questi risultavano da uno stesso numero di angoli piani rispettivamente uguali di quelle figure rettilinee. Ma ciò non poteva assumersi, e bisognava

(*) Una tal definizione è la seguente: *Similes figurae solidae sunt, quae similibus planis multitudine aequalibus continentur.*

dimostrarlo, molto più perchè, come faremo vedere in una Nota qui appresso, non ha sempre luogo che angoli solidi compresi da angoli piani uguali in numero ed in grandezza, e disposti coll' ordine stesso sieno uguali. Al contrario, se per criterio della similitudine delle figure solide si adotti quello stesso dato da Euclide per le figure piane, cioè l' uguaglianza degli angoli solidi, la quale in altro non può farsi consistere, che nel perfetto loro combaciamento, e la proporzionalità ordinata de' lati intorno ad essi, facilmente si potrà derivare da tali condizioni l' altra immediatamente connessavi, che le figure piane che terminano i solidi simili debbano essere respettivamente simili tra loro. Il Simson nel suo Euclide credè di completare la definizione delle figure solide simili che trovasi nel testo greco degli Elementi, aggiugnendo alla condizione che in esse dovevano esser simili i piani che la terminavano, l' altra che gli angoli solidi di tali figure dovevano essere respettivamente uguali (*), ed ei forse immaginò, che la prima di tali condizioni era equivalente all'altra della proporzionalità de' lati, ond' è che coll'aggiunzione da lui fattavi della seconda si veniva ad assegnare per le figure solide simili lo stesso criterio che per le piane si era già dato. Or noi adottammo da principio la definizione del Simson, che ragionando nella maniera poc' anzi espressa ci sembrò buona; ma riflettendo meglio su di essa, ci riuscì poi di avvertire, che per ridurla tale da non lasciare alcun luogo ad equivoco, e per farla prettamente corrispondere all' idea di simi-

(*) Ecco la definizione del Simson: *Similes figurae solidae sunt, quae et singulos angulos solidos aequales habent, et quae similibus planis continentur, multitudine aequalibus.*

glianza che nel principio di questa Nota si è stabilita, conveniva necessariamente aggiugnere alla proporzionalità de' lati intorno agli angoli solidi, che questi fossero in proporzione ordinata: poichè in altro caso potranno a due figure solide competersi tutti gli altri attributi di simiglianza, senza che però questa abbia effettivamente luogo. In fatti sieno i parallelepipedi AE, *ae* i quali abbiano uguali gli angoli solidi in A, *a*, perchè compresi da tre angoli piani respettivamente uguali, cioè CAB a *cab*, DAB a *dab*, e DAC a *dac*; ma sia DA : AB :: *ba* : *ad*, BA : AC :: *ca* : *ab*, e quindi DA : AC :: *ac* : *ad*, vale a dire che non si corrispondano tali lati in proporzione ordinata: ne risulta come ognun vede che sieno simili i parallelogrammi BC, *bc*; DB, *db*; ma non perciò le figure solide proposte si potranno dir simili, mentre se si suppongano uguali i lati omologhi AD; *ab* di tali figure, che sono gli elementi omologhi della similitudine, come gli abbiamo chiamati, l'uguaglianza perfetta di tali figure non ne segue necessariamente. Nè tampoco ad essi si potrebbe adattare la dimostrazione de' parallelepipedi simili fatta da Euclide per la prop. 33. del Lib. XI. Inoltre sieno i parallelepipedi AE, *ae*, i quali, come poc' anzi, abbiano uguali gli angoli solidi in A, *a*, che perciò sieno essi equiangoli; e sia inoltre l'angolo DAC supplemento dell'altro CAB, e quindi *dac* di *cab*. Or tali parallelepipedi si supponga che abbiano i lati intorno agli angoli uguali proporzionali nel seguente modo, cioè che stia AD : AB :: *ab* : *ad*, ed AB : AC :: *ad* : *ac*: sicchè si abbia poi per equalità ordinata AD : AC :: *ab* : *ac*. Ciò posto i parallelogrammi DB, *db* saranno simili. Ed essendo l'angolo DAC supplemento dell'altro CAB, di cui n' è anche supplemento l' angolo ACF, sarà l' angolo DAC uguale all'

fig. 14. N.

fig. 15. N.

altro ACF, e quindi ad *acf*: il perchè essendo anche DA : AC :: *ab*, o *cf*: *ae*, i parallelogrammi CD e *cb* saranno anche simili tra loro. E similmente si dimostrerà che sia il parallelogrammo CB simile a *cd*. Adunque i due solidi AE, *ae* saranno terminati da piani respettivamente simili, ed avranno i loro angoli solidi corripondenti uguali, senza che però sieno effettivamente simili, mentre non potranno farsi coincidere tutte le volte che i due termini omologhi AD, *ab* delle proporzioni che hanno luogo in essi diventino uguali, come dovrebbe aver luogo nel caso che fossero simili. Nè tampoco potrebbe a questa sorte di parallelepipedi applicarsi la dimostrazione della Proposizione di Euclide poc' anzi detta, dalla quale per altro si rileva, che sebbene il criterio della similitudine non si ritrovi stabilito convenevolmente nella definizione 9. del lib. XI. del Testo degli Elementi, pure tacitamente le condizioni mancanti si ritrovano incluse, allorchè si è trattato di figure simili nell' XI°. e XII°. Libro.

Alla Def. XI.

Dalla precedente nota si rileva chiaramente, che la seguente enunciazione che trovasi nel Testo Greco degli Elementi per decima definizione del Lib. XI, cioè: *Aequales et similes figurae solidae sunt quae similibus planis, multitudine, et magnitudine aequalibus continentur*, non possa esser mai una definizione, ma sì bene un teorema da dimostrarsi vero, o falso. Roberto Simson credè che Teone, o altro antico editore, siasi fatto ingannare da una falsa evidenza, e di una proposizione ne abbia fatta una definizione; e molto a proposito soggiunge: *Quamvis igitur verum esset figuras solidas, quae similibus planis, multitudine, et magnitudine aequalibns continentur, inter se aequales esse, me-*

rito tamen culpandus est is, qui ex hac propositione demonstranda definitionem fecit. E questo ragionamento del Simson vien comprovato dallo stesso Euclide; mentre quest' accurato Geometra nel I°. Libro de' suoi Elementi dimostrò, e non assunse, che due triangoli i quali hanno i lati respettivamente uguali sieno uguali: e se troviamo per prima definizione del Lib. III., che *cerchi uguali sono quelli, che hanno uguali raggi*, ciò niente può provare in favore di coloro, che hanno ritenuta nel Lib. XI. la def. 10. (*Vegg. la Nota alla def. 1. Lib. III.*) Ma ha poi ragione il Simson di esclamare: *Quid autem dicendum si haec propositio non vera sit? nonne confitendum est Geometras per mille tercentos annos in hac re elementari deceptos fuisse?* La maniera nella quale egli si sforza di provarlo, sebbene concludente, è pure una sottigliezza aliena dalla purità geometrica, e da quella semplicità, che deve porsi negli Elementi di questa scienza. Del resto una tal quistione non contribuisce per niente al nostro scopo di render gli Elementi di Euclide senza neo; e perciò noi la tralasciamo. Si riscontrino intanto le altre note alle Proposizioni A e B, ed alla prop. 28. del presente Libro, che sono come il compimento della presente.

Alle Def. XVII. e XXI.

Chiunque sa, che le cose, che si contengono in un libro elementare di Geometria non debbono esser mai più generali dell' applicazione, che deve farsene, e che quindi le definizioni debbono essere ad esse proporzionate, non dimanderà di certo, perchè mai Euclide abbia definito particolarmente il cono, ed il cilindro, cioè il solo *cono*, e *cilindro*, che, data la definizione generale di questi solidi, si direbbero *retti*

Ed ognuno che per poco è versato nelle cose geometriche sa bene, che le poche verità, che contengonsi nel Libro XII., circa il rapporto di questi solidi, sono le sole delle quali occorre servirsi nell' intero Corso delle Matematiche: che perciò, sebbene esse si appartengano ugualmente al cono, ed al cilindro in generale, ed il rilevarle sì generalmente, che particolarmente sia lo stesso; purtuttavia Euclide, per ragion di metodo, e per una certa semplicità elementare, si contentò dimostrarle per lo cono, e per lo cilindro retto solamente; e quindi non dovè dare, che le definizioni di questi solidi, e non già quelle del cono, e del cilindro in generale. Di più l' aver ritenute per questi solidi le definizioni Euclidee, com'era conveniente, per ciò che poc' anzi si è detto, ci ha anche proccurato l' altro vantaggio di non essere stati obbligati nel Libro sulla Sfera e sul Cilindro di aggiungere, ogni volta, che si è parlato del cono, eccetto, che nella Prop. 18., la condizione ch' esso sia retto; cioè *isoscele*, come lo chiama Archimede; mentre le verità che egli dimostra per questo solido, ad una tal sola sua specie, e non già al cono in generale, si appartengono.

Alla Prop. I.

Nel Testo Greco della dimostrazione di questa proposizione, si trova, come per prova dell' impossibilità *che due linee rette possano avere un comune segmento*, inserito da mano imperita il seguente passaggio: » poi» chè una linea retta non incontra un' altra in più di » un punto, altrimenti dovranno quelle tali linee rette » combaciare » la qual cosa dice bene il Simson non è da assumersi, ma da dimostrarsi; e la dimostrazione

di essa equivale a quella del sopraddetto incidente: » due linee rette non possono avere un comune segmento ».

Il Commandini che ritenne quel passaggio intruso, nella sua versione, dimostrò poi quest' incidente nel comentario della presente Proposizione, ma egli non avvertì che per adattare tal sua dimostrazione a quella della Proposizione, bisognava far vedere che la retta proposta, e quella che risultava prolungando nel piano sottoposto la parte di essa che si supponeva in tal piano, esistevano in un piano stesso. Il Simson supplì a ciò nel suo Euclide, e noi lo abbiamo seguito. La dimostrazione di quell' incidente poi, non l' abbiamo fatta come il Commandini; ma l' abbiamo rilevata per corollario dalla prop. 14. del Lib. I, allontanandoci in ciò fare anche dal Simson, che la dedusse per Corollario dalla 11. del Libro stesso (*Veggasi a questo proposito la nota alla Prop. 14. Lib. I.*).

Non sono nè meno mancati de' Geometri, che hanno posto nel numero degli assiomi l' incidente di cui si è parlato di sopra, e tra questi il Barrow; ma esso non ha la natura di assioma; e perciò non sta bene tra questi. Altri poi se ne sono valuti senza dimostrarlo, e senza stabilirlo come princio geometrico.

ALLA PROP. II.

Nel testo di Euclide la prima parte della presente Prop. si trova enunciata nel seguente modo. *Ogni triangolo è in un piano.* Or non essendo concepibile, ch' Euclide abbia voluto in questo luogo dimostrare ciò, che aveva assunto ne' primi sei Libri, bisogna supporre, che l' enunciazione di tal Proposizione sia stata da taluno mutata, e viziata: che perciò noi, ad

imitazione del Simson, l' abbiamo cambiata in quest'altra » *Tre punti, che non istieno per diritto, sono in un piano*: e per la dimostrazione di una tal verità, ci siamo serviti di quell' istesso semplicissimo ripiego, del quale si era valuto il Simson.

Alla Prop. III.

Questa prop. si trova dimostrata ne' nostri Elementi in una maniera diretta, ch' è pure alquanto più semplice di quella che trovasi nel Testo Greco.

Alla Prop. VII.

Questa Prop. è stata senza dubbio intrusa nel Testo Greco da qualche antico espositore, per un malinteso rigore. Imperocchè la verità, che in essa si dimostra, cioè che » *La linea retta che unisce due punti presi in » due linee rette parallele cade nel piano di queste* » vale a dire : *La linea retta che unisce due punti presi » in un piano cade nel piano stesso* » è compresa nella natura della linea retta, e del piano, ed è stata varie volte assunta dallo stesso Euclide ; del che potrà vedersene un esempio nella Prop. 30. Lib. I. E ciò mostra chiaramente, ch' Euclide non credè mai necessario il dimostrarla.

Inoltre la dimostrazione di una tal Prop. 7, è fondata sulla 3. del libro stesso, nella quale ben due volte si assume da Euclide ciò, che nella 7. si vuol dimostrare: e lo stesso si trova anche assunto nella dimostrazione della Prop. 6. Queste ragioni ci hanno determinato a tralasciare assolutamente una tal proposizione in questi nostri Elementi.

ALLA PROP. XV.

Nella dimostrazione di questa Proposizione, dopo di essersi detto « Or essendo la BA parallela alla GH » fig. 13. II vi si è aggiunto il seguente passaggio necessario » per » essere ciascuna di tali rette parallela alla ED, con » cui non sono nel piano stesso » il qual passaggio vi dovè sicuramente essere nel Testo Greco, prima che imperita mano nel cancellasse. Che poi una tal dimostrazione sia stata da taluno corrotta, lo mostra anche evidentemente il trovarvisi nella continuazione di essa detto » e per la medesima ragione (cioe per quella onde si era dimostrata la BG perpendicolare al piano delle BA, BC) la BG è perpendicolare al piano per le GH, GK » mentre al contrario la BG è perpendicolare alle GH, GK, perchè perpendicolare al piano che passa per esse, ch'è lo stesso di quello per le ED, EF. Or noi nella nostra versione abbiamo corretto, giusta le qui recate indicazioni, la presente dimostrazione: e prima di noi lo stesso aveva anche fatto il Simson.

ALLA PROP. XX.

Nel principio di questa dimostrazione si trova nel Testo Greco : » ma se non lo è, sia BAC il maggiore». fig. 18. II Or siccome l'angolo BAC può essere uguale ad uno de' rimanenti, si è perciò da noi, e dal Simson detto » ma » se non lo è, sia l' angolo BAC non minore di uno » qualsivoglia de' rimanenti, maggiore però di DAB».

ALLA PROP. XXI.

E qui è a proposito il far rilevare, che non possono costituirsi altri angoli solidi con angoli piani di figure

rettilinee regolari, che cinque solamente. In fatti dagli angoli piani del triangolo equilatero si possono costituire tre specie di angoli solidi, combinandone insieme tre, quattro, o cinque: perchè fino a questa somma si ha sempre una quantità minore di quattro retti, mentre da sei in poi tal quantità si fa uguale a quattro retti, o maggiore. É chiaro ancora, che dagli angoli del quadrato non possa costituirsi, che semplicemente quell'angolo solido, ch'è contenuto da tre di essi. E si potrà pure costituire un angolo solido con tre angoli del pentagono regolare insieme presi; poichè questi fanno meno di quattro retti. Al contrario non se ne potrà costituire uno da tre angoli dell'esagono regolare, che fanno già quattro retti; e molto meno se ne potrà costituire uno con tre angoli dell'ettagono regolare, o di altra figura di maggior numero di lati.

Or il primo de'cinque summentovati angoli solidi è quello del *tetraedro*; il secondo dell'*ottaedro*; il terzo dell'*icosaedro*, che come fu detto nelle definizioni 26, 27, e 29 del Lib. XI. sono figure solide terminate da triangoli equilateri uguali. Di più l'angolo compreso da tre angoli retti si appartiene al *cubo*, ed al *dodecaedro* quello ch'è contenuto da tre angoli del pentagono. Ma eccone di queste cinque figure solide un elegante costituzione ricavata dal Lib. XIII. degli Elementi di Euclide.

LEMMA I. (PROP. 4. LIB. XIII. EUCL.)

Se una linea retta sia divisa in estrema, e media ragione; i quadrati di tutta la linea, e della parte minore sono il triplo del quadrato della parte maggiore.

fig. 16. N. Sia la retta AB divisa in C, come si è detto; sarà il quadrato di AB insieme con quello di BC uguale al dop-

pio rettangolo di AB, BC insieme col quadrato di AC*; ma il rettangolo di AB, BC è uguale al quadrato di AC; e quindi il doppio di quello al doppio di questo. Adunque il quadrato di AB insieme con quello di BC è triplo del quadrato di AC. C. B. D.

* 7. II.

LEMMA II. (Prop. 5. Lib. XIII. Eucl.)

Se una linea retta si divida in estrema, e media ragione, e poi le si aggiunga per diritto il maggior segmento: l'intera linea retta sarà anche divisa in estrema e media ragione; ed il segmento maggiore sarà la linea retta, che si era posta da principio.

Sia la linea retta BA divisa in C in estrema, e media ragione, e per diritto ad essa si ponga la AD uguale alla AC.

fig. 17. N.

E poichè BA stà ad AC, come AC a CB; sarà, invertendo, AC a BA, come CB ad AC*, e componendo BD a BA, come BA ad AC*, o sia ad AD: perciò la BD è divisa in estrema, e media ragione in A, ed AB è il maggior segmento. C. B. D.

* D. V.
* 18. V.

LEMMA III. (Prop. 7. Lib. XIII. Eucl.)

Se tre angoli di un pentagono equilatero sieno uguali, o che si succedano, o no, il pentagono sarà equiangolo.

Sieno primieramente uguali gli angoli successivi in A, B, C del pentagono ABCDE: si tirino le AC, BE, FD. E poichè le due CB, BA sono uguali alle due EA, AB, e che l'angolo CBA è uguale all'angolo BAE, sarà CA uguale a BE, l'angolo BCA uguale all'angolo AEB, e l'angolo BAC, o sia BAF uguale all'altro ABE, o sia ABF. Laonde, essendo uguali gli angoli BAF,

fig. 18. N.

ABF, sarà AF uguale ad FB, e per conseguenza anche FC sarà uguale ad FE: è pure CD uguale a DE, e DF comune; quindi sarà l'angolo FCD uguale all'altro FED. Ma era anche l'angolo FCB uguale all'altro FEA: laonde sarà tutto l'angolo BCD uguale all'altro AED; e perciò questo angolo pareggerà ancora ciascun di quelli in A, ed in B. Similmente si dimostra, che ad essi sia uguale l'angolo CDE: adunque il proposto pentagono sarà equiangolo.

Non sieno ora contigui gli angoli uguali; ma si bene sieno essi quelli in A, C, D: si unisca BD. E poichè le due BA, AE sono uguali alle due BC, CD, e comprendono angoli uguali, sarà la base BE uguale alla base BD, l'angolo AEB all'angolo CDB, e l'angolo ABE all'altro CBD: ma è pure l'angolo BED uguale all'angolo BDE; poichè si è dimostsata BE uguale a BD. Adunque tutto l'angolo AED sarà uguale a tutto l'altro CDE; e perciò anche a quelli in A, ed in C, ai quali si dimostrerà similmente essere uguale l'angolo ABC. Quindi il proposto pentagono è equiangolo. C.B.D.

LEMMA IV. (Pro. 10. lib. XIII. Eucl.)

Il quadrato del lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio è uguale ai quadrati de' lati dell'esagono, e del decagono regolare inscritti nel cerchio stesso.

fig. 19. N. Rappresenti AB il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio ACD, e sulla AB si tiri dal centro F la perpendicolare FH, che si produca in K, e si uniscano le KB, KA, BF, FA, sarà KB il lato del decagono inscritto in un tal cerchio. Finalmente si tiri sopra la AK la perpendicolare FLM, si unisca KN, e si prolunghi AF in G. E poichè AB è il lato del pentagono, sottenderà esso la

quinta parte della circonferenza, o sia due quinte parti della semicirconferenza; e perciò se si applichi nel semicerchio ABCG la BC uguale alla AB, il rimanente arco CG dovrà essere la quinta parte della semicirconferenza, cioè uguale ad AK: ma l'arco AK è doppio dell'altro KM; adunque anche l'arco CG sarà doppio dell'altro KM: che perciò tutto l'arco BG sarà doppio dell' altro BM, e quindi anche l'angolo BFG dovrà esser doppio dell' altro BFM. Ma un tal angolo GFB è pur doppio dell'angolo GAB: laonde sarà l'angolo BFN uguale all'altro BAF; ed i triangoli BFA, BFN, che hanno i già detti angoli uguali, e l'angolo ABF di comune, saranno equiangoli, e quindi simili. Adunque sarà AB a BF, come FB a BN; ed il rettangolo ABN pareggerà il quadrato di BF. Or poichè AL è uguale ad LK, e la NL è comune, e perpendicolare alla KA, sarà la KN uguale alla NA, e l'angolo LKN uguale all'altro LAN Ma l'angolo LAN è uguale all'angolo KBN; perciò l'angolo LKN sarà uguale a KBN: è poi l'angolo NAK comune ai due triangoli AKB, AKN; quindi il triangolo AKB è equiangolo all'altro KNA; e perciò BA stà ad AK, come KA ad AN; ed il rettangolo BAN sarà uguale al quadrato di AK. Laonde essendosi già dimostrato il rettangolo ABN uguale al quadrato di BF; i due rettangoli ABN, BAN insieme presi, cioè il quadrato di AB* pareggerà i quadrati di BF e di AK.C.B.D. * 2. II.

LEMMA V. (Prop. 12. lib. XIII. Eucl.)

Se nel cerchio s' inscriva il triangolo equilatero; il quadrato del lato del triangolo sarà triplo di quello del raggio del cerchio.

Sia ABC il triangolo equilatero inscritto nel cerchio fig. 20 N. ABC, il cui raggio AD si prolunghi in E, e si unisca

la EB. E poichè AB è lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio ABC, sarà l'arco AB la terza parte della circonferenza; quindi l'arco BE ne sarà la sesta parte; e perciò la congiungente BE, dinotando il lato dell'esagono regolare inscritto in questo cerchio pareggerà il raggio AD. Or il quadrato di AE, ch'è quadruplo di quello di AD, essendo uguale ai quadrati di AB, e di BE, saranno anche questi il quadruplo del quadrato di AD. Per lo che se da' quadrati di AB, e di BE si tolga quello di BE, e dal quadruplo del quadrato di AD si tolga uno di essi; dovrà restare il quadrato di AB uguale a tre quadrati di AD. C. B. D.

PROP. I. PROBL. (PROP. 13. LIB. XIII.)

Costituire un tetraedro.

fig. 21. N. Si esponga una linea retta AB, dalla quale si tagli la terza parte BC*: poi si descriva sopra di essa AB il semicerchio ADB, nel quale siri la CD perpendicolare al diametro. Ciò posto si esponga il circolo EFG, che abbia il raggio uguale alla linea retta CD, e descritto in esso il triangolo equilatero EFG, si tiri dal centro H la HK perpendicolare al piano del cerchio, ed uguale alla AC; e finalmente congiungansi le KE, KF, KG: dico che la piramide EFGK sia un tetraedo.

* 9. VI.

E poichè la KH è perpendicolare al piano EFG, e quindi alle linee rette HE, HF, HG; perciò i triangoli rettangoli KHE, KHF, KHG avendo uguali i loro cateti, avranno anche uguali le ipotenuse KE, KF, KG, ciascuna delle quali è chiaro che sia uguale alla AD. Or per gli triangoli simili ADC, DBC deve stare AD a DC, come DB a BC; e quindi saranno anche proporzionali i quadrati che da tali rette descrivonsi*. Ma

* 22. VI.

il quadrato di DB sta a quello di BC, come AB a BC, perciò in questa ragione sarà pure il quadrato di AD a quello di DC. Laonde essendo AB tripla di BC sarà anche il quadrato di AD triplo di quello di DC. Ma è poi anche il quadrato di EF triplo di quello di EH*, ed è EH uguale a DC. Adunque sarà il quadrato di AD uguale a quello di EF; e perciò AD pareggerà EF. Per la qual cosa le KE, KF, KG, EF, FG, GE essendo tutte uguali alla stessa AD, saranno anche tra loro uguali; e quindi i triangoli EFG, EKF, FKG, GKE saranno tutti equilateri, ed uguali. Onde il solido FGEK sarà un tetraedro*. C. B. F.

* l. 5.

* d. 29 XI.

PROP. II. PROBL. (Prop. 14. lib. XIII. Eucl.)

Costituire un ottaedro.

Si esponga il quadrato EFGH, nel quale si tirino* le diagonali EG, FH, che si divideranno in parti uguali in K, e ad angoli retti*: indi dal punto K si tiri al piano EFGK la perpendicolare MKL, che si prolunghi dall'una, e l'altra parte del piano in L, M, e tagliate da essa le KL, KM uguali ad una delle KE, KF, KG, KH, si uniscano le LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH: dico che il solido contenuto dagli otto triangoli ELF, FLG, GLH, HLE, EMF, FMG, GMH, HME sia un ottaedro.

* Is 22 N.

* di. 9. VI.

Imperocchè essendo FK uguale a KH, e l'angolo in K retto, sarà il quadrato di EH doppio di quello di EK: e di nuovo essendo EK uguale a KL, e l'angolo in K retto, sarà il quadrato di EL doppio di quello di EK. Laonde sarà il quadrato di EL uguale a quello di EH, ed EL uguale ad EH. Similmente si dimostra che LH sia uguale ad HE; quindi il triangolo ELH è equilatero. E nel modo stesso dimostran-

dosi, che sieno equilateri gli altri triangoli, che hanno per basi i lati del quadrato EFGH. e per vertici i punti L, M, ne segue, che si è in tal modo costituito l' ottaedro*. C.B.F.

*d.24.XI.

PROP. III. PROBL. (Prop. 15. lib. XIII. Eucl.)

Costituire un cubo.

fig.23.N. Si esponga il quadrato FGML, e poi dai vertici F, G, M, L de' suoi angoli si elevino al piano di esso le perpendicolari FE, GH, MN, LK, ciascuna delle quali si tagli uguale al lato del quadrato esposto. Finalmente si uniscano le EK, KN, NH, HE, si verrà in tal modo a costituire il solido GK terminato da sei quadrati GL, LE, EN, NG, GE, MK, che perciò è un cubo. C. B. F.

PROP. IV. PROBL. (Prop. 16. lib. XIII. Eucl.)

Costituire un icosaedro.

fig.24 N. Si esponga la linea retta AB, dalla quale si tagli la quinta parte BC*; e descritto sulla AB il semicerchio ADB, si tiri in esso la CD perpendicolare alla AB, e si unisca la DB. Ciò posto si esponga il cerchio EFGHK, il cui raggio VE sia uguale a DB, e descritto in esso il pentagono regolare EFGHK, si dividano per metà gli archi FG, GH, HK, KE, EF in M, N, X, O, L, e si uniscano le EL, LF, FM, MG, GN, NH, HX, XK, KO, OE, e le altre LM, MN, NX, XO, OL; sarà LMNXO un altro pentagono regolare inscritto nel cerchio stesso, ed ELFMGNHXKO sarà il decagono. Dopo ciò dai punti E, F, G, H, K si elevino al piano del cerchio le perpendicolari EP, FR, GS, HT, KY, ciascuna delle quali sia uguale al

*9. VI.

raggio EV, e si uniscano le PR, RS, ST, TY, YP, PL, LR, RM, MS, SN, NT, TX, XY, YO, OP.

E poichè le EP, KY sono ambedue perpendicolari al piano stesso, saranno parallele tra loro; ma sono di più uguali, perciò anche la PY è uguale e parallela alla EK, cioè al lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio EFGHK. E dimostrando nel modo stesso, che ciascuna delle PR, RS, ST, TY sia uguale al lato del pentagono inscritto nel medesimo cerchio, ne segue che il rettilineo PRSTY sia identico a questo pentagono. È poi PE uguale al lato dell' esagono inscrittibile nel medesimo cerchio, EO è quello del decagono, e l' angolo PEO è retto; quindi PO sarà anche uguale al lato del pentagono*. Similmento si dimostra, che lo sia OY; perciò POY è un triangolo equilatero: e nel modo stesso si rileverà, che sieno triangoli equilateri gli altri PLR, MRS, SNT, TXY. E poichè si è dimostrato, che sì PL, che PO sia uguale al lato del pentagono, cioè ad LO; perciò il triangolo LPO sarà equilatero: e triangoli equilateri pur saranno gli altri LRM, MSN, NTX, XYO.

* l. 4.

Or dal punto V, ch' è centro del cerchio EFGHK si elevi al piano di un tal cerchio la perpendicolare ΨVΩ, che si produca dall' una, e l' altra parte in Ψ, Ω, e si taglia la VQ uguale al raggio di quel cerchio, e poi le VΨ, QΩ, ciascuna uguale al lato del decagono: finalmente si uniscano le PΩ, PQ, YΩ, EV, LV, LΨ, ΨM. E poichè ciascuna delle VQ, PE è perpendicolare al piano del cerchio EFGHK, saranno esse parallele; ma sono anche uguali; quindi EV sarà uguale e parallela a PQ; e perciò PQ al pari di EV è uguale al lato dell' esagono. Ma è poi QΩ uguale a quello del decagono; adunque PΩ il cui quadrato pareggia quelli di PQ, e di QΩ sarà uguale al lato del

* l. 4 pentagono*. Similmente si dimostra, che YΩ sia uguale al lato del pentagono, cioè a PY; adunque il triangolo PΩY sarà equilatero. E collo stesso ragionamento si proverà, che sia equilatero ciascuno de' rimanenti triangoli, che hanno per basi le PR, RS, ST, TY, e per vertice il punto Ω. Di nuovo, poichè il quadrato di ΨL è uguale ai quadrati di VL, ch'è lato dell'esagono, e di VΨ, ch'è lato del decagono, sarà
* l. 4 LΨ uguale al lato del pentagono*: e dimostrando che anche MΨ sia uguale ad un tal lato, cioè ad LM, sarà LΨM un triangolo equilatero. E nella stessa guisa si dimostrerà, che sieno triangoli equilateri quelli altri, che hanno per basi le MN, NX, XO, OL, e per vertice il punto Ψ. Si è dunque costituito un solido compreso da venti triangoli equilateri, che perciò è un icosaedro*. C. B. F.
*d. 28 XI.

PROP. V. PROBL. (Prop. 17, lib. XIII. Eucl.)

Costituire un dodecaedro.

fig. 25. N. Si espongano due piani di un cubo perpendicolari tra loro, e sieno questi ABCD, EBCF; e poi si dividano per metà tutt' i loro lati in G, H, K, L, M, N, X, e si uniscano le GPK, HPL, MOH, NOX. Indi si dividano le NO, OX, HP in estrema, e media ragione ne' punti R, S, T, e sieno OR, OS, PT i segmenti maggiori; e da questi punti R, S, T si elevino a' piani BF, BD, dalla parte esterna del cubo, le perpendicolari RY, SV, TQ uguali a ciascuna delle OR, OS, TP: finalmente si uniscano le BY, YV, VC, CQ, QB. Dico che il pentagono BYVCQ sia equilatero, equiangolo, ed in un solo piano; e che quindi sia uno di quei dodici, che terminano il dodecaedro da costituirsi.

Si uniscano le RB, SB, VB. E poichè la linea retta NO è divisa in estrema, e media ragione in R, saranno i quadrati di ON e di NR tripli di quello di OR; cioè i quadrati di BN, e di NR, o sia il quadrato di BR sarà triplo del quadrato di RO, cioè dell' altro di RY. Laonde sarà il quadrato di BY, ch'è uguale a quelli di BR, RY, quadruplo del quadrato del RY. Ma VY è pur dupla di YR; poichè RS è dupla di RO, o sia di RY: perciò BY è uguale ad VY. Similmente si dimostrerà, che ciascuna delle BQ, QC, CV sia uguale a BY, o ad YV: quindi il pentagono BYVCQ è equilatero.

Dico ora, che esso sia in un piano. Si tiri dal punto O la OZ parallela alla RY; o alla SV, dalla parte esterna del cubo, e si uniscano le ZH, HQ; queste ZH, HQ dovranno stare per diritto. Imperocchè essendo la HP divisa in T in estrema, e media ragione, sarà HP a PT, come PT ad HT; ma HP è uguale ad HO, e PT è uguale a TQ, o sia ad OZ; adunque sarà HO ad OZ, come QT a TH; ed è HO parallela a TQ, perchè sono entrambe perpendicolari al piano BD, come pure TH è parallela ad OZ, perchè ciascuna è perpendicolare al piano BF. Adunque dovrà esser ZH per diritto con HQ*; e perciò il piano BAC in cui esiste la parte HQ della linea retta QHZ dovrà essere per diritto col piano BYVC in cui si trova l'altra parte HZ della stessa retta QHZ: vale a dire, che il pentagono BQCVY si troverà in un piano. * 32.VI.

Bisogna adesso dimostrare, che sia equiangolo. E poichè la linea retta NO è divisa in R in estrema e media ragione, e gli si è aggiunta per diritto la OS, ch' è uguale al suo maggior segmento OR; perciò anche la NS sarà divisa in O in estrema, e media ragione, ed ON sarà il segmento maggiore*. Laonde i quadrati di NS e di SO, o sia di NS e di SV sono * I. 2.

* l. 1 il triplo di quello di ON* , o pure di NB. Adunque aggiuntovi di comune il quadrato di NB , saranno i quadrati di SV , SN, NB uguali a quattro quadrati di NB. Ma i quadrati di SN , NB sono uguali a quello di BS; perciò i quadrati di BS e di SV, cioè il quadrato di BV è quadruplo di quello di BN ; e quindi BV doppia di BN, o sia uguale a BC. E l essendo le due BY, YV uguali alle due BQ , QC , l'una all'altra , e la base VB uguale alla base BC; sarà l'angolo BYV uguale all'angolo BQC. Similmente dimostreremo che l'angolo YVC sia uguale all'angolo BQC : quindi i tre angoli BQC, BYV, YVC sono tra loro uguali ; e perciò il pentagono BQCVY è equiangolo: ed era anche equilatero. Dunque è un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Che se si espongano gli altri due piani del cubo perpendicolari ad AC , e contigui a CE, cioè DαβC, ed AλδB; e che poi si dividano per metà anche i loro lati, e si compia la stessa costruzione , che si è fatta precedentemente, prendendo da una parte il piano DαβC in cambio del piano AC , e questo invece di BF; e dall'altra prendendo il piano AλδB invece di BD , e questo in luogo di CE: si dimostrerà similmente, che i pentagoni QCεDΨ , QBγAΨ sieno equilateri , equiangoli , ed uguali al primo BQCVY , per aver con esso comuni i lati QB, QC. Si sono dunque costituiti tre pentagoni tangenti i tre lati BC, DC, AB del cubo, e coerenti l'uno all'altro per mezzo dei lati BQ, QC, QΨ, che gli sono comuni. Se dunque col metodo stesso si costituiscano altri nove pentagoni tangenti respettivamente gli altri nove lati del cubo, si
d.27.XI. sarà costituito il dodecaedro C. B. F.

SCOLIO GENERALE.

Posta questa general costituzione delle cinque figure solide regolari, facilmente si rileva come si possa descrivere uno di essi solidi, che abbia un lato dato, o inscriverlo in una data sfera. E questa seconda condizione è stata sempre da Euclide aggiunta a ciascuno de' summentovati Problemi. Euclide ne ha di più ricavato il rapporto, che serba il diametro della sfera al lato del poliedro regolare in essa inscritto; e quindi ha rapportati tra loro i lati di questi cinque poliedri inscritti in una stessa sfera (*Veg. la Prop.* 18. Lib. XIII.). Ma noi siamo già andati molto innanzi in tale argomento, avendo nella presente nota compreso quasi tutto il Lib. XIII. degli Elementi, che se conveniva da una parte tralasciare, per la poca importanza elementare, come nella maggior parte delle istituzioni si costuma, non dovevasi altronde in qualche modo omettere di rapportare i principali Problemi da noi esposti; e perchè eran questi necessarj a stabilire la possibilità delle definizioni 24, 25, 26, 27, e 28, del Lib. XI,; ed anche perchè le costruzioni di essi non dovevano, per la loro eleganza, restar obbliate.

Alla Prop. XXII.

E qui, similmente che nella Prop. 20., si trova detto nel Testo Greco, e da tutti gli espositori, verso il principio » ma se no, sieno disuguali gli angoli ABC, » DEF, GHK; e sia l'angolo ABC maggiore di ciascuno di quelli in E ed in H » il che, come riflette bene il Simson mostra evidentemente che questo luogo sia viziato; potendo avvenire che l'angolo ABC pareg- fig. 20. II.

giasse uno degli altri due in E ed in H. Ha però bisognato emendarlo come si trova fatto nell'esposizione nostra, nella quale ci siamo attenuti alla dimostrazione dell'*Aliter* del Testo Greco, conformandoci all' Euclide del Simson.

Alle Prop. XXIII.

La soluzione che dà Euclide del Problema contenuto in questa proposizione è assai elegante, per meritare la preferenza sulle altre che se ne sono congegnate in diverse istituzioni moderne di Geometria; e noi l'abbiamo perciò ritenuta modificandone alquanto la dimostrazione, che alla maniera del Simson riesce assai più semplice ed elegante di quella che trovasi nel Testo Greco. Intanto avendo noi anche ordita per tal Problema una soluzione diversa dall' Euclidea, e della quale ci eravamo valuti nelle prime edizioni di questi nostri Elementi, non crediamo fuor di proposito di qui appresso recarla.

LEMMA.

Dal centro di un cerchio sieno tirati quattro raggi, che comprendano tre angoli capaci a costituire un angolo solido (*), *de' quali il primo ed il terzo sieno acuti, e poi pe' termini de' raggi estremi si tirino al cerchio le tangenti, che incontrino i raggi medj prolungati: si potrà costituire un triangolo dalla congiungente questi punti d' incontro, e da quelle tangenti.*

fig. 27. N. Dal centro A del cerchio BEG sieno tirati i quattro raggi AB, AF, AG, AE, che comprendano i tre angoli BAF, FAG, GAE capaci a costituire un angolo

(*) Cioè che due di essi comunque presi sieno maggiori del terzo, e tutti tre insieme minori di quattro retti (20, e 21. XI.)

solido, de' quali il primo ed il terzo sieno acuti; e poi da' punti B, E si tirino al cerchio le tangenti BC, ED, e congiungasi la CD: dico che dalle tre linee rette BC, CD, DE si potrà costituire un triangolo.

Si supponga essere l'angolo BAC quello de'due acuti che non è minore dell' altro BAE, e dal punto C, si tiri al cerchio BEG l'altra tangente C*b*, e si giunga la *b*A; sarà C*b* uguale a CB, e l'angolo CA*b* uguale all' altro CAB: si unisca D*b*. E perchè due de'tre angoli proposti sono maggiori del terzo; dovrà l'angolo DA*b*, ch'è la differenza de'due DAC, CA*b*, cioè DAC, CAB, esser minore dell' altro DAE; per lo che i due triangoli DAE, DA*b* avendo il lato DA comune, gli altri lati AE, A*b* uguali, e l' angolo DAE maggiore dell' altro DA*b*; avranno la base DE maggiore della base D*b*. E perciò essendo DC e D*b* maggiori di C*b*, o di CB, saranno anche DC e DE maggiori di CB: e similmente dall' essere C*b* e D*b*, o pure CB e D*b*, maggiori di DC, si rileva che CB e DE debbano anche essere maggiori di CD. Finalmente se l'angolo BAC è uguale all' altro EAD, è chiaro che BC sarà uguale ad ED; e perciò che DE sia minore di BC, CD, prese insieme. Che se poi tali angoli si suppongano disuguali, e BAC il maggiore, si costituisca al punto A della linea retta AB l' angolo BA*e* uguale all' altro EAD; è chiaro che la DE, al pari della sua uguale B*e*, debba esser minore della BC; e quindi molto minore delle BC, CD insieme prese. Adunque dalle tre linee rette BC, CD, DE si potrà costituire un triangolo*.

* 20. I.

E perciò dal centro di un cerchio ec. C. B. D.

PROBLEMA.

Costituire un angolo solido con tre angoli piani minori di quattro retti, e tali che due comunque presi sieno maggiori del terzo.

fig. 27. N. Sieno dati i tre angoli piani HKL, Q e PRS minori di quattro retti, e tali che due comunque presi sieno maggiori del terzo, bisogna costituire con essi un angolo solido.

Caso 1. Se almeno due degli angoli proposti HKL, PRS sono retti; allora dal vertice dell' angolo CAB uguale al terzo angolo dato Q si elevi la perpendicolare AD al piano di esso angolo CAB, e sarà chiaro che questa e le due AB, AC costituiranno al punto A un angolo solido contenuto da tre angoli piani respettivamente uguali a' tre dati HKL, Q e PRS. n. 1.

Caso 2. Che se due di essi angoli HKL, PRS sieno acuti, e l' altro comunque: allora preso in un piano un punto A, si tirino da questo nel piano stesso le quattro linee rette AB, AC, AD, AE, che comprendano gli angoli BAC, CAD, DAE uguali respettivamente a' tre dati HKL, Q e PRS, ed in modo che il primo BAC, e l' ultimo DAE sieno gli acuti; e poi descritto col centro A intervallo qualunque AB il cerchio BEG, si faccia la stessa costruzione del Lemma precedente: si potrà costituire un triangolo dalle tre linee rette BC, CD, DE*; sia questo il triangolo *bcd*, ed innalzata sul piano di esso dal vertice del suo angolo compreso dalle *bc*, *bd* uguali respettivamente alle BC, DE, la perpendicolare *ba* uguale alla BA, o alla AE, si giungano le *ac*, *ad*; sarà l'angolo solido, in *a*, ch' è compreso dagli angoli piani *cab*, *bad*, *dac* quello che si cerca.

fig. 26. N.

* l. pr. c. segue

fig. 27. N. n. 2.

Imperciocchè i due triangoli rettangoli CBA, *cba* avendo respettivamente uguali i lati dintorno agli angoli retti CBA, *cba*; dovranno avere anche uguali le ipotenuse CA, *ca*, e dovrà di più essere l'angolo *cab* uguale all' altro CAB, cioè ad HKL. Similmente si dimostrerà essere DA uguale a *da*, e l'angolo *dab* uguale a DAE, cioè a PRS. Laonde i due triangoli CAD, *cad* avendo i lati respettivamente uguali, dovranno avere anche l' angolo *cad* uguale all' altro CAD, cioè a Q; e perciò i tre angoli *bac*, *bad*, *cad*, che comprendono l' angolo solido in *a*, pareggiano respettivamente i tre dati.

Caso 3. Sieno ora ottusi due degli angoli dati *l*KH, *s*RP. Si prolunghino i lati *l*K, *s*R degli angoli *l*KH, *s*RP in L ed S, e poi con gli angoli HKL. PRS che sono acuti, e col terzo angolo Q si costituisca, come nel caso precedente, l' angolo solido in *a*. Indi il lato *ab* di quest' angolo solido, ch' è adjacente ai due angoli *bac*, *bad*, che sono uguali ad HKL, PRS si prolunghi al di sopra del vertice *a* in *h*: sarà l' angolo solido cercato quello che si costituisce al punto *a* dagli angoli *cad*, *cah*, *dah*. *fig. 27 N. n. 2*

Poichè si vede chiaramente, che essendo i due angoli *bac*, *cah* uguali a due retti, saranno essi uguali ai due LKH, HK*l*; che perciò toltine gli uguali *bac*, LKH debba il rimanente angolo HK*l* pareggiare il rimanente *hac*: e similmente si dimostra che l' angolo *dah* sia uguale all' altro PR*s*. Ma è poi l' angolo *cad* uguale al terzo angolo dato Q: adunque l' angolo solido constituito in *a* dai tre angoli piani *cah*, *dah*, *cad* sarà quello che si cerca.

Caso 4. Finalmente sia l' angolo Q acuto, l' altro HKL retto, ed il terzo PR*s* ottuso. Si prolunghi similmente la *s*R in S; e poi si costituisca l' angolo solido in *a* contenuto dai tre angoli piani *cab* uguale a *fig. 27 N. n. 3.*

* cas.2. Q, *cad* uguale ad HKL; e *dab* uguale a PRS'; e si prolunghi il lato *ad* adjacente ai due angoli *cad*, *dab* in *h*; sarà l'angolo solido in *a*, compreso dai tre angoli piani *cah*, *cab*, *bah*, quello che si cerca. Imperocchè essendo l'angolo *cad* retto, sarà il suo conseguente *cah* anche retto; e perciò uguale all'angolo HKL: ed essendo i due angoli *dab*, *bah* uguali a due retti, e quindi uguali ai due *s*RP, PRS; toltine gli angoli uguali *dab*, PRS, resterà l'angolo *bah* uguale all'altro PRs: È poi l'angolo *cab* uguale all'angolo Q; quindi il sopraindicato angolo solido in *a* sarà il cercato.

Laonde si è costituito un angolo solido ec. C. B. F.

Alle Prop. A e B.

Nella Prop. 25 di questo Libro Euclide assume la prima volta, che due solidi terminati da piani simili, ed uguali sieno uguali e simili. Adunque era necessario, che questa tal verità si dimostrasse prima della 25. E siccome i solidi di cui trattasi nella 25 sono parallelepipedi; e che in generale negli Elementi non si tratta d'identicità, che tra figure solide i cui angoli solidi sono compresi da tre soli angoli piani; perciò era sufficiente, che la dimostrazione poc' anzi detta si limitasse a questo solo caso. Or per questa dimostrazione si esigeva, come è chiaro, e come si è detto anche nella Nota alla def. 10., che si fosse prima dimostrato » che due angoli solidi contenuti da tre angoli piani respettivamente uguali, e similmente posti, sono uguali »: che perciò noi abbiamo dovuto premettere alla 25, come due lemmi, le Prop. A, e B, dalle quali l'uguaglianza degli angoli solidi contenuti da tre angoli piani, e l'uguaglianza e similitudine delle figure solide, che hanno le condizioni espresse nel prin-

cipio di questa nota, resta geometricamente stabilita. Vale a dire, che per mezzo di questi lemmi restano rigorosamente dimostrate le Prop. 25, e 26, del Lib. XI.; e quindi le tante altre, che sopra di esse sono fondate, e che ritrovansi nel Libro stesso, e nel seguente.

Il Simson per dimostrare la Prop. A vi ha premesso l'altro lemma, cioè, che » *Se vi sieno due angoli solidi, ognuno de' quali sia contenuto da tre angoli piani uguali tra loro, l' uno all' altro; i piani ne' quali esistono gli angoli uguali saranno similmente inclinati* » ed una tal verità si trova al contrario compresa nell' uguaglianza degli angoli solidi proposti, quando questa si dimostrasse indipendentemente da quella. Or noi avendo trovata in Euclide stesso, e nel medesimo Libro XI. una dimostrazione, che pare ordita piuttosto a quest' oggetto, che all' altro cui trovasi destinata, quella cioè della Prop. 35., l'abbiamo preferita alla dimostrazione del Simson; anche perchè una tal dimostrazione dà per immediata conseguenza una verità della quale si ha bisogno nella 40. del Lib. XI; e che Euclide, e Simson erano obbligati a dimostrare precisamente con quel ragionamento, che a noi è servito per dimostrare l' uguaglianza degli angoli solidi di cui trattasi nella Prop. A (*Veggasi la Nota alla Prop. 35. di questo Lib.*).

Che poi non si verifichi generalmente, che gli angoli solidi contenuti da angoli piani in numero maggiore di tre, i quali sieno respettivamente uguali, e similmente posti, debbano coincidere, la qual cosa si è già accennata nella nota alla def. 10. di questo Lib., si può dimostrare nel seguente modo.

TEOREMA.

Con quattro angoli piani, disponendoli collo stesso ordine, si può costituire una moltitudine di angoli solidi disuguali.

fig. 28. N. Sieno M, N, P, Q i quattro angoli piani proposti, e da essi si supponga già costituito l'angolo solido in A, in modo, cioè, che l'angolo BAC sia uguale ad M, l'angolo CAD ad N, l'angolo DAE a P, l' angolo EAB a Q. Si supponga in primo luogo, che i due angoli M, N sieno maggiori de' rimanenti P, Q: che perciò questi due ultimi non potranno, insieme presi, pareggiar due retti*. Or poichè i due angoli M, N, cioè BAC, CAD sono maggiori dell' angolo BAD*, e che M, cioè BAC, insieme con BAD è maggiore di CAD, o sia di N; ed al contrario che CAD insieme con BAD è maggiore di CAB, o sia di M: perciò essendo BAD minore di BAE, EAD*, cioè di P, Q; dovrà essere M insieme con P, Q maggiore di N; ed N insieme cogli stessi angoli P, Q maggiore di M. Ma sono pure, per supposizione, M ed N maggiori di P con Q. Laonde da' tre angoli M, N, e P insieme con Q, i quali hanno le condizioni delle Prop. 20, e 21 Lib. XI. si potrà costituire un angolo solido. Sia questo l' angolo solido in *a* compreso dai tre angoli piani *bac* uguale ad M, *cad* uguale ad N, e *bad* uguale a P e Q insieme. Ciò posto sieno similmente gli angoli M, Q maggiori dei rimanenti due N, P; che perciò nè meno questi potranno essere uguali a due retti. Si dimostrerà come poc'anzi, che dai tre angoli piani M, Q, ed N insieme con P si possa costituire un angolo. Si costituisca dunque quest' altro angolo solido nel punto *a* della *ab**, e sia quello, ch' è contenuto dall' angolo *bac* uguale ad M,

* 21. XI.
* 20. XI.
* 21. XI.
* 26. XI.

dall'angolo *bae* uguale a Q, e dall'altro *cad* uguale ad N e P insieme. Or è evidente, che se il piano dell' angolo *cad* s'intenda rivolgersi un poco intorno alla *ac*, e verso la *ba*; minorandosi l'angolo *bad*, e divenendo *baf*; si potrà costituire al punto *a* della *ba* un angolo solido compreso dai tre angoli piani *baf*, *bae*, ch'è uguale a Q, ed *eaf*, ch' è lo stesso che *ead*, o sia P: quindi si sarà già costituito al punto *a* della *ab* un angolo solido contenuto dai quattro angoli piani *bac*, *caf*, *fae*, *eab*, che sono respettivamente uguali ai proposti M, N, P, Q. E siccome l'artifizio poc'anzi adoperato potrà sempre aver luogo, fintantochè il lato *ad* non cada nel piano dell' angolo *cae*, nel qual caso svanice di nuovo l'angolo solido in *a* compreso dai quattro angoli piani *bac*, *caf*, *fae*, *eab* e ne risulta quello che si contiene dai tre *bac*, *bae*, *eac*; è chiaro perciò, che tra i limiti *bad*, *cae* si potranno costituire moltissimi angoli solidi compresi dai medesimi quattro angoli piani M, N, P, Q disposti coll'ordine stesso.

Che se gli angoli M, N insieme presi risultino uguali agli altri P, Q presi insieme; ritrovandosi, o no anche gli angoli N, P uguali agli angoli M, Q: è chiaro, che la dimostrazione procederà nel modo stesso, sol che gli angoli *bad*, *cae* suppongansi per poco minori, il primo di questi de' due P, Q, e l'altro degli altri due N, P; e di più compresi tra i limiti dinotati per lo primo dalla somma degli angoli N, P, e dalla differenza degli altri M, N, per l'altro dalla somma degli angoli N, P, e dalla differenza degli altri M, Q. E perciò è chiaro, che anche in questo caso si potranno costituire moltissimi angoli solidi dai quattro angoli piani proposti. C. B. D.

Scol. Dalla dimostrazione rapportata si rileva chiaramente, che questa varietà di angoli solidi compresi

da quattro angoli piani solamente dipenda dalla diversità dell'angolo *bad*, o pur da quella dell'angolo *cae*, ciascun de' quali si comprende da due lati opposti dell'angolo solido in *a*; che perciò sarebbero uguali i due angoli solidi in A, ed *a* ciascuno compreso da quattro angoli piani uguali, e similmente posti, se mai gli angoli BAD, *bad* fossero uguali, nel quale caso lo dovrebbero esser pure gli angoli CAE, *cae*, o al contrario. Vale a dire se essi angoli solidi dividonsi in due altri angoli solidi, ciascuno compreso da tre angoli piani uguali, e similmente disposti. Ed in generale sarebbe facile il dimostrare, che sono uguali due angoli solidi, ciascuno compreso dallo stesso numero di angoli piani quanti si vogliano, se mai essi dividonsi ordinatamente in angoli solidi ciascuno contenuto da tre angoli piani similmente posti, ed uguali rispettivamente. Ha avuto dunque torto il Clavio di soggiugnere dopo la definizione dell'angolo solido. *Ex his vero perspicuum cuivis erit, illos angulos solidos inter se esse aequales, qui continentur angulis planis et multitudine, et magnitudine aequalibus. Nam hujusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se penetrare intelligantur.*

Alla Prop. XXIV.

Nell' enunciazione di questa Proposizione, si trova omesso nel Testo Greco, che i parallelogrammi opposti del parallelepipedo debbono essere anche simili, e la stessa omissione si ritrova in que' luoghi della dimostrazione, ove ciò occorreva notare; ed il Simson e noi abbiamo supplito a tal mancanza. Anche il Keill nella sua edizione dell'Euclide di Commandini ristampata più volte in Oxfort ad uso delle Scuole d'Inghilterra avvertì tale omissione, dalla quale ne seguiva di non potersi con-

chiudere nella seguente Prop. 25 l'uguaglianza de'solidi parallelepipedi che in essa occorrono, per la def. 10 del Lib. XI, e vi supplì in un Corollario alla presente Proposizione.

Alla Prop. XXV.

Dopo la Prop. A e l'altra B da noi aggiunta al presente Libro di Euclide, la dimostrazione di questa Proposizione 25 diventa rigorosa: non lo era però così allorchè tal dimostrazione fondavasi sulla def. 10 del Lib. XII il contenuto della quale non formava soggetto di definizione; ma di teorema da dimostrarsi (*Veg. la Nota alla def.* 10. *Lib. XI.*)

Alla Prop. XXVI.

Nel Testo Greco di questa Proposizione si trova assunto, che *due angoli solidi compresi ognuno da tre angoli piani respettivamente uguali, siena uguali tra loro*, e lo stesso sistema hanno serbato tutti i comentatori ed espositori degli Elementi di Euclide, eccetto il Simson. Or una tal Proposizione corrisponde perfettamente a quest'altra: *Due triangoli sferici che hanno i lati respettivamente uguali, hanno anche uguali gli angoli corrispondenti, e possonsi far coincidere*, che Menelao credè che fosse necessario dimostrarla nella sua *Sferica*; e ne ebbe ragione: come dunque si potrà poi assumere negli Elementi di Geometria la proposizione analoga sopraddetta? Noi abbiamo rimediato a questo difetto nella nostra Prop. A.

Il Tacquet nel suo Euclide definisce gli angoli solidi uguali esser quelli che » posti l'uno nell'altro coincidono »: ma ciò, dice bene il Simson, è un Assioma, non già una definizione.

ALLA PROP. XXVIII, ED AL LEMMA PREMESSOVI.

Non vi è difetto negli Elementi di Euclide, che non costi caro assai il toglierlo ; il neo delle parallele, chi non sa di quanto peso sia stato, e quanto abbia travagliato per lungo tempo invano le menti de' sommi Geometri antichi e moderni ; e finanche la semplice oscurità della definizione 5. del libro V. è stato un oggetto da far deviare moltissimi dal vero sentiero di stabilire una geometrica teoria delle ragioni uguali. Ed Euclide alzando la testa dalla sua tomba avrebbe ben ragione di difendersi dalle imputazioni, che gli si sono perciò date, dicendo » Geometri che per sì lun-
» ga serie di più di 20 secoli avete camminato sulle
» orme da me segnate, sovvengavi che tanti vostri
» sforzi riuniti non sono stati bastanti a togliere da'
» miei libri di Geometria que' difetti, che la mia men-
» te sola non valse a superare. E pure io in redigerli
» non mi dovei solamente limitare ad una semplice
» compilazione di verità già conosciute ; ma vi sta-
» bilii quel sistema ammirabile di esse, che or tanto
» sorprende ; vi dovei supplire non poche verità che
» mancavano alle già rinvenute, per formare quella
» catena prodigiosa che ora vi osservate, e che rende
» tal mia opera, dopo tanto tempo, e dopo sì gran-
» di progressi del Matematiche, ancora molto superio-
» re a tutti gli sforzi inutili, che si sono fatti per mu-
» tarla ; e che vi diedi in essa con ordin certo e ri-
» goroso quelle tante verità, che bastavano agli aumen-
» ti successivi della Geometria e delle Matematiche in
» generale, evitando, con una sagacia impareggiabile,
» il superfluo, che disdice sempre in un libro di Geo-
» metria elementare.

Ma eccoci ad un altro scoglio in cui è urtato il Sim-

son, per evitarne uno in cui era incorso Euclide, e nel quale eravamo anche noi inciampati, seguendo quel Geometra Inglese, nelle prime tre edizioni della nostra esposizione degli Elementi di Euclide, non avendo cominciato a farlo avvertire che nelle Note alla quarta edizione. Dopo di aver egli rigettata la definizione 10. del Lib. XI., e di aver data una più esatta nozione delle figure solide uguali e simili nella prop. C del suo Lib. XI., ch'è la stessa che la B del nostro, bisognava necessariamente non dipartirsi da questa nozione nell'applicazione che doveva farsene. Or nella dimostrazione della prop.28. di un tal libro si trova dal Simson tirata una conseguenza più generale delle premesse: imperocchè egli, dopo di aver dimostrati uguali, l'un l'altro, i piani che terminano i prismi BAGDCE, BHGDFE, conchiude, che il primo di tali solidi sia uguale al secondo: *etenim* (dice egli) *planis similibus, multitudine, et magnitudine aequalibus, et similiter positis continentur, et nullus ex ipsorum angulis solidis continetur pluribus quam tribus angulis planis*: rimettendosi per tal conseguenza alla citata prop. C del Lib. XI. Ma il Simson tuttochè accortissimo Geometra non avvertì, che l'essenzialissima condizione di *similiter positis* non aveva assolutamente luogo, che nel solo caso di un parallelepipedo i cui lati insistenti alle basi gli fossero perpendicolari, e non già negli altri casi: che perciò una tal dimostrazione cade interamente. Euclide commise senza dubbio anch'egli una irregolarità geometrica, allorchè stabilì per definizione l'uguaglianza e similitudine de' solidi terminati da piani; ma egli si contentò piuttosto di assumere come principio una cosa che gli pareva abbastanza chiara, e non errare in conseguenze dimostrando, nel che un geometra non deve mai peccare.

Intanto, come abbiamo detto poc'anzi, fin dalla

quarta edizione noi correggemmo tal difetto, recando nelle Note una rigorosa e convenevol dimostrazione a tal Proposizione, che non fummo a tempo ad inserire nel Testo, come facemmo nella seguente edizione. E da tal nostra dimostrazione ne abbiamo dedotta come un Corollario la verità che forma l'oggetto della prop. 39. del Lib. XI. di Euclide, e che noi avevamo tralasciata di recare nelle precedenti edizioni, perchè inutile all'ordine geometrico delle proposizioni di questi Elementi.

A tal nostra dimostrazione abbiamo però dovuto premettere un Lemma analogo alla Proposizione 1. del Lib. X. di Euclide, che da esso abbiamo dedotta come Corollario, mentre dovevamo valercene per la dimostrazione della Prop. 2. del Lib. XII.

Riflette poi benissimo il Simson, al proposito di questa Proposizione, che dovrebbe in essa dimostrarsi e non assumersi, che *le diagonali corrispondenti di due piani opposti del parallelepipedo sieno in un piano*, alla qual mancanza ed egli, e prima di esso il Clavio ha supplito. Noi però oltre ad avere ciò dimostrato, abbiamo anche voluto evitare, che tal cosa si assumesse nell'enunciazione, che perciò la nostra si troverà differente da quella del Testo, che i due precedenti Geometri avevano creduto senza inconveniente il ritenere.

Alla Prop. XXIX.

Questa Proposizione del pari che si disse per la 35 del Lib. I. potrebbe aver tre casi; e tre di fatti ne considera il Simson nel suo Euclide: il primo è quando il lato GE del parallelogrammo GK coincidesse coll'altro MH del parallelogrammo MD, l'uno e l'altro opposto al parallelogrammo AB base comune de' parallelepipedi proposti; il secondo quando GE dividesse, il

fig. 30. II

parallelogrammo MD; e il terzo è per l'appunto quello che si vede nella nostra figura. Or siccome il primo di tali casi è una conseguenza immediata della 28, la quale vi fu perciò premessa da Euclide, lo che era stato anche avvertito dal Simson; e che quelle pe' due altri casi sono identiche; noi perciò abbiamo fatta tal dimostrazione adattandola ad uno di essi solamente, modificandola verso la fine di maniera che non mostrasse, come avviene nel Testo Greco, di appartenersi più all' uno de' suddetti due casi secondo e terzo, che all' altro.

Alla Prop. XXX.

Nella dimostrazione di questa Proposizione trovasi omesso nel Testo Greco di provare che i piani opposti del solido LR fossero paralleli, al che abbiamo noi supplito, e prima di noi lo aveva fatto anche il Simsom. Da una tal Proposizione abbiamo poi dedotto per Corollario una verità per mezzo della quale abbiamo facilitate ed abbreviate grandemente le dimostrazioni del secondo caso delle Proposizioni 31, e 34. riducendole immediatamente a quelle dal primo caso. fig. 31.II.

Alla Prop. XXXI.

Nel Testo Greco questa Prop. ha due casi; il primo in cui supponesi, che i lati de' parallelepipedi, che insistono alle basi sieno a queste perpendicolari, e l'altro, che vi insistano obbliquamente. Noi intanto avendo dimostrato nel Cor. della Prop. prec., che ogni parallelepipedo a lati insistenti obbliquamente alla base può rappresentarsi facilmente con un altro a lati insistenti perpendicolarmente alla base stessa, abbiamo per ciò ridotta la presente dimostrazione al solo caso primo. Di più il Simson vorrebbe, che il primo di que-

sti casi si distinguesse in due parti, in una delle quali si supponessero le basi equiangole, e nell' altra no; ed egli si duole, che ciò non si trovi praticato nel Testo Greco, e crede che qualche editore antico abbia intessuta la dimostrazione della prima di queste due parti a quella della seconda. Or siccome una tal seconda parte è la più generale, ch' essa comprende la prima; e che volendo adattare a due parallelepipedi, che hanno le condizioni della prima parte l' apparecchio della seconda, si vede chiaramente, che il parallele- pipedo ICXN risultante dalla costruzione deve confondersi coll' altro CDFN, ch' è uno de' proposti, sicchè la dimostrazione ne resta da se stessa modificata: perciò noi non abbiamo creduto di dover rapportare, che la sola seconda parte del caso primo.

fig. 32. II.

Alla Prop. XXXII.

L' editore del Testo Greco nell' apparecchio di questa dimostrazione omise di dire, che il parallelogrammo FH si debba applicare nell'angolo FGH uguale all' angolo LCG; il che era necessario: che perciò molto a proposito vi hanno supplito Clavio, e Simson.

fig. 33. II.

Inoltre ricercandosi in tale apparecchio, che sulla base FH si costruisca un parallelepipedo della stessa altezza, che l' altro CD, ed avente con questo di comune il lato FD insistente al piano delle basi; l' editore Greco aveva erroneamente tralasciata quest' ultima circostanza, ch' è stata dal Simson, e da noi supplita. E la stessa correzione si è anche praticata nella Prop. 33.

Alla Prop. C.

É da credere, che Euclide avesse posta ne' suoi Elementi una tal Proposizione, ch' è simile a quella

che aveva già data pe' parallelogrammi equiangoli nella 23. del Lib. VI.

Alla Prop. XXXIV.

La dimostrazione della seconda parte di questa Proposizione si trova grandemente abbreviata per mezzo del Corollario da noi aggiunto alla Prop. 21 del presente Libro.

Alla Prop. XXXV.

In questa Prop. si vuol dimostrare, che » *Se vi sieno due angoli piani uguali, e ne' loro vertici si adattino due linee rette sublimi, le quali contengano angoli uguali co' lati degli angoli proposti, l' uno all' altro; che poi in queste linee rette sublimi si prendano due punti, e da essi si abbassino le perpendicolari ai piani ne' quali sono i primi angoli; e dai punti dove queste perpendicolari incontrano tali piani si tirino le linee rette ai vertici di essi primi angoli: queste congiungenti comprenderanno angoli uguali colle rette sublimi.* Da tal dimostrazione poi si deduce per Corollario » che: *Se mai le linee rette sublimi sieno uguali; le perpendicolari dovranno essere anche uguali.*

Or chi mai potrà sostenere, che tutto questo artificio sia di Euclide; e che questo Geometra, che altronde riconosciamo dotato di una grandissima sagacia, e penetrazione geometrica, si fosse poi in ciò così ingannato? Imperocchè o Euclide suppose, che gli angoli solidi contenuti da tre angoli piani uguali e similmente posti sono uguali, o non lo suppose? Se egli suppose una tal cosa; perchè poi usar tanto artifizio per dimostrare una verità, che ne risultava intuitivamente? Ed ecco in qual modo.

Sieno gli angoli BAC, *bac* i proposti, ed AD, *ad* le linee rette sublimi, che formano l' angolo BAD u- fig. 26. II.

guale all' angolo *abd*, e l' angolo DAC uguale all' angolo *dac*: dovranno essere uguali gli angoli solidi in A, *a*; e perciò posti l' uno nell' altro dovrà l' angolo BAC combaciare coll' altro *bac*, e la AD adattarsi sulla *ad*. Adunque si prendano nelle AD, *ad* i punti D, *d*, e da essi si tirino a'piani BAC, *bac* le perpendicolari DE, *de*: è chiaro che queste, quando gli angoli si suppongono coincidere, risultano parallele, ed esistono colle AE, *ae* in un medesimo piano; che perciò le comuni sezioni di questi piani cogli altri BAC, *bac* dovranno cincidere; e quindi essere uguali gli angoli DAE, *dae*.

Che se poi Euclide non volle assumere, ma dimostrare, che gli angoli contenuti da tre angoli piani uguali, l' uno all'altro, e similmente posti, sieno uguali; dovè certamente farlo prima della 24: ed in tal caso la dimostrazione della presente proposizione avrebbe potuto anche congegnarsi nel modo poc' anzi detto. Nell' uno, e nell' altro caso dunque la dimostrazione della 35. del Libro XI. non è corrispondente all' oggetto che vuol dimostrarsi: che perciò è da credere, ch' essa sia stata ordita da Euclide per dimostrare precisamente l' uguaglianza di due angoli solidi, che avessero le condizioni poc' anzi dette; e che quelli editori antichi, che credettero di poter assumere senza dimostrazione una tal verità, si sieno poi di un tal ragionamento valuti per dimostrare la 35. Inoltre, per convincersi di ciò che si è detto, basta riflettere, che la verità che in tal proposizione vuol dimostrarsi non è di nessun uso negli Elementi, e che al contrario vi bisogna per la dimostrazione della Prop. 40. del Lib. XI. il Corollario, che se ne deduce: perchè dunque Euclide avrebbe usata in questo luogo una bizzaria geometrica, della quale non ve ne ha altro esempio negli Elementi, e che non è certamente senza taccia? E poi

un tal Corollario si poteva anche dimostrare indipendentemente dalla Proposizione da cui si fa dipendere, come il Simson ha fatto: che perciò non sappiamo vedere, perchè mai questo Geometra abbia ritenuta nel suo Euclide la Prop. 35., che poteva comodamente tralasciare, come noi abbiamo fatto; deducendo quel Cor. dalla sua prop. B, ove avea dimostrato, che due angoli solidi contenuti da tre angoli piani respettivamente uguali, e similmente posti possonsi far coincidere; del qual principio egli in effetto si serve per la dimostrazione del Corollario suddetto.

Alla Prop. XXXVI.

Questa proposizione conferma ciò, che abbiamo detto nella nota precedente: imperocchè si vede chiaro, che essa può dimostrarsi senza aver bisogno di quella; e così ha fatto Tacquet, supponendo che gli angoli solidi contenuti da tre angoli piani respettivamente uguali fossero anche uguali: la qual cosa nel Libro XI. già altre volte si era assunta. Ciascun vede però, che tal dimostrazione del Tacquet, sia, per ciò che più volte si è detto, difettosa; giacchè questa proprietà degli angoli solidi doveva dimostrarsi, e non assumersi. Inoltre in una tal dimostrazione il Tacquet suppone, che i solidi sieno già fatti, e non dimostra in qual modo si debbano costruire, come si trova eseguito nel Testo Greco. Il Simson poi avendo dimostrato il Corollario della Prop. 35 indipendentemente da una tal Prop. come si è detto nella nota precedente, ha perciò dimostrata la 36. senza aver bisogno della 35.

Alla Prop. XXXVII.

In questa Proposizione si trova assunto, che le ragioni triplicate di due ragioni uguali sieno pure tra loro uguali. Ma se Euclide non volle assumer nella prop. 22. del Lib. VI. che le ragioni duplicate di ragioni uguali sono uguali; il che per altro si deduceva dalla Proposizione 22. del libro V., come mai potè poi supporre ciò vero senza dimostrazione per le triplicate? È per questa ragione, che noi seguendo Clavio, e Simson abbiamo dimostrata la presente proposizione in una maniera diversa dal Testo Greco, ed analoga all'altra che Euclide tenne per la suddetta Proposizione 22. del Lib. VI.

Alla Prop. XXXVIII.

Questa Proposizione, sebbene non abbia alcun uso negli Elementi; pure trovandosi adoperata da Apollonio, e da altri Geometri, ed essendovene anche bisogno in questo nostro Corso di Geometria nella proposizione 5. delle Prenozioni alle Sezioni Coniche; è perciò che l'abbiamo ritenuta, nè pensiamo come il Simson ch'essa sia affatto inutile.

Alla Prop. XXXIX.

Questa Prop. par che sia stata stabilita da Euclide negli Elementi come Lemma alla Prop. 17. del Lib. XIII.; mentre di essa non si trova giammai fatto alcun altro uso negli Elementi stessi. Or noi non avendone bisogno per un tal Libro abbiamo perciò creduto conveniente di non recarla nell'ordine delle Proposizioni. Intanto però l'enunciazione, e la dimostrazione di siffatta Proposizione trovasi recata nello Scol. della Prop. 28. del Lib. XI., come fu già avvertito nella Nota a questa.

AL LIBRO XII.

Alla Prop. II.

Gli antichi Geometri tutte le volte, che vollero paragonare le figure curvilinee tra loro, le considerarono come il limite di figure rettilinee; e dal rapporto di queste vennero in cognizione del rapporto di quelle. Euclide, per esempio, avendo dimostrato indipendentemente dal numero dei lati, che due poligoni simili inscritti in due cerchi erano tra loro in duplicata ragione de' diametri, si spinse a dimostrar lo stesso per gli cerchi, che considerò come i limiti de' poligoni in essi continuamente inscritti; ma l'idea di considerare il cerchio come un poligono d'infiniti lati era poco geometrica, perchè ripugnante alla definizione di una tal curva; e perciò egli, dopo essersene servito per la scoperta di tal verità, si ricusò giustamente ad adottarla per la dimostrazione di essa. Archimede pervenne nel modo stesso a determinare le superficie del cilindro del cono, e della sfera, ed i rapporti delle solidità loro, la quadratura della parabola, e le proprietà delle spirali, nè poi volle adottar l'idea di limite in dimostrare queste sue importanti scoperte. Ed ecco un altro fortissimo argomento, col quale resta convalidata la necessità delle dimostrazioni indirette. I Geometri antichi, che amavano certamente assai più che noi la purità, ed il rigor geometrico, vi sono spesse volte ricorsi, quanto hanno dovuto nascondere le nozioni dell'infinito, per mezzo delle quali erano pervenuti alla scoperta di qualche verità. E chi ardirà mai sostenere

che sia forse meglio il fondar la conoscenza di una verità importante su di un principio metafisico, e paradosso, piuttosto che ricorrere ad un ragionamento indiretto convincentissimo? É vero, che l' uso de' metodi moderni ci ha resi più arditi a maneggiar le teoriche dell' infinito; ma non bisogna però negare gli sforzi, che sommi analisti hanno fatti per evitarle, ben persuasi della loro durezza. Qual necessità vi sarà dunque d'introdurre queste nozioni negli Elementi di Geometria, quando si può fare altrimenti, e bene?

È pure da avvertirsi che nella dimostrazione di questa fig.42.II. Proposizione dopo di essersi detto » adunque eziandio » come il cerchio ABCD allo spazio S, così è il poli- « gono AXBOCPDR al poligono EKFLGMHN » si è tralasciato *il permutando*, come inutilmente inseritovi da mano imperita, potendosi fare la conchiusione, come va fatta, per la 14. del V°. E ciò potrà valere anche in conferma di quanto fu detto nella Nota alla Prop. 25. del Lib. VI.

Alla Prop. III.

In questa Proposizione dopo di essersi dimostrato il fig.43.II. triangolo EHG uguale e simile al triangolo KDL si soggiugne: *Eadem ratione et EAG triangulum est aequale et simile triangulo KHL*; mentre si poteva conchiudere, che questi due triangoli sieno uguali, e simili, per l' 8. del Lib. I. Di più una volta, che si è conchiuso, che il triangolo EAG sia uguale e simile all'altro KHL, è assolutamente superfluo il dimostrare, che l'angolo BAC pareggi l'angolo KHL; il che trovasi eseguito nel Testo Greco, quando si vuol provare, che i triangoli BAC, KHL sono simili.

Alla Prop. IV.

Alcuni passaggi di questa Proposizione si sono da noi resi più esplicitamente, che nel Testo di Euclide.

Alla Prop. VI.

Il modo nel quale da noi si è dimostrata questa Proposizione, ch'è analogo a quello tenuto dal Simson, ha resa una tal dimostrazione un poco più breve dell'Euclidea.

Alla Prop. VIII.

La soggiunta a questa Proposizione, corrispondente al luogo segnato *V. N.*, è al di là di ciò che si era proposto a dimostrare; ma essa non è inutile, e dovrebbe almeno formare un Corollario per tal Proposizione, necessario a premettersi a quello che ora è il primo di essa. Noi intanto non abbiamo creduto di dovere su tal proposito fare un' alterazione nel Testo, molto più perchè nè meno il Simson aveva stimato di farla.

A' Corollarj 1 e 2. della Prop. VII.

Il primo di questi Corollarj trovasi nel Testo Greco esposto con tal laconismo, che genera oscurità, e noi ce ne siamo perciò discostati, per dichiararlo convenevolmente.

L'altro Corollario poi fu recato dal Commandini nel suo Comentario alla presente Prop. 7., ed il Simson lo ridusse nel Testo ove sta opportunamente collocato, come noi abbiamo anche fatto.

Alla Prop. VIII.

Avendo noi data delle figure solide simili una definizione diversa dall' Euclidea, abbiamo dovuto sulla norma di questa definizione cambiare anche la dimostrazione della presente Proposizione, nel principio di essa, ove vuol provarsi che sieno simili i parallelogrammi DE, EF.

46.47.II.

Al Cor. della Prop. VIII.

A questa Prop. si trova nel Testo aggiunto un Corollario, la cui dimostrazione era imperfetta, poichè si tralascia di dimostrare, che le piramidi triangolari in cui si dividono due piramidi poligone simili sieno anche simili; il che necessariamente doveva dimostrarsi: e lo stesso Euclide così ha praticato in un caso analogo nella 12. del presente Libro. Noi abbiamo perciò supplita una tal mancanza, seguendo il Simson.

Alle Prop. XI e XII. del Lib. XII.

Il Simson dal non trovar osservato nelle figure di queste due Proposizioni l' ordine alfabetico delle Lettere, come ha sempre costumato di fare Euclide, è stato indotto a sospettare, che vi sia stata un' alterazione del Testo Greco.

Alla Prop. XIII.

In questa Prop. si trovava assunto, e non già dimostrato, che la comune sezione di un cilindro con un piano parallelo alle sue basi, sia un cerchio; e noi abbiamo ciò supplito.

Alla Prop. XV.

Il primo caso della seconda parte di questa dimostrazione non si trova nel Testo Greco ; ed inoltre vi sono alcune cose mancanti anche nel secondo caso di una tal parte. E sì a quello, che a questo ci si è supplito.

Alla Prop. XVI.

La presente Proposizione è un Lemma Problematico stabilito da Euclide per la dimostrazione della Proposizione 18. del presente Libro, ove esso si vale di un' acconcia maniera di dimostrare, della quale ci siamo anche noi sull'esempio suo prevalsi utilmente in parecchie dimostrazioni del I°. Libro di Archimede sulla Sfera e sul Cilindro; e fino alla precedente edizione del nostro Corso di Geometria Elementare, ce n' eravamo anche serviti per dimostrare la 2, la 10, e la 11. del Lib. 12. di Euclide, mutando le sue dimostrazioni, che poi credemmo ben fatto di dover restituire, per esser consentanei al nostro proposito di modificare il Testo di Euclide solamente ove ve ne fosse assoluto bisogno. Coloro però che desiderano di conoscere tali nostre dimostrazioni, facilissime a congegnarsi sull'andamento di quella della 18, potranno rinvenirle, come abbiamo già detto, in tutte le edizioni del nostro Euclide precedenti alla sesta.

Intanto nella soluzione del Lemma Problematico di cui parliamo, nell'assegnare l' arco DA, tale che prendendone uno minore, dall'istesso punto A, la corda di questo non può incontrare la circonferenza interiore *dab*, ci siamo valuti di una costruzione diversa da quella del Testo, e più convenevole, come ognuno rileverà facilmente da se medesimo. fig. 55.II.

Allo Scol. della Prop. XVI.

A questa Proposizione abbiamo aggiunto uno Scolio che contiene un Lemma Problematico analogo ad essa, e necessario per la dimostrazione di molti Teoremi di Archimede sulla Sfera, da noi dimostrati nella maniera poc' anzi detta nella precedente Nota.

Alla Prop. XVII. del Lib. XII.

In questa Proposizione, nel Testo Greco, si propone a: *Descrivere nell'esteriore di due sfere concentriche un solido poliedro, il quale non tocchi la sfera interiore*; e nella dimostrazione della costruzione di tal problema vi erano molte cose guaste, e mutilate, che il Simson ha corrette. Or poichè una tal Proposizione non è che un lemma della 18, noi abbiamo trovato opportuno di sostituirvi l'altra, che trovasi ne' nostri Elementi; e per evitare una lunga e complicata soluzione, e dimostrazione, qual'è quella che dà Euclide di un tal Problema; ed anche, perchè il lemma da noi stabilito espone a dirittura il rapporto di due solidi inscritti in due sfere, e generati in quel modo, che da noi si è supposto, mentre che un tal rapporto, sul quale è fondata la dimostrazione della Prop. 18., non forma presso Euclide che un Cor. della sua Prop. 17.

AVVERTIMENTO.

L' esserci in questi Libri XI. e XII. molto allontanati da una semplice versione, ci ha impedito di far notare minutamente i guasti prodotti nel Testo Greco dagli antichi espositori, de' quali si potrà esserne pie-

namente informati dalle Note del Simson al suo Euclide. Noi intanto chiuderemo queste nostre Note a' primi sei Libri, ed all' XI. e XII. di Euclide, dicendo col poc' anzi nominato insigne geometra, che dalle cose fin quì esposte apparisce abbastanza quanto siene stati corrotti e mutilati dagl' ignoranti editori gli Elementi dell' accuratissimo Euclide; e quindi che l' opinione che molti sommi uomini ebbero dell' edizione greca che ora abbiamo, cioè ch' essa poco o niente si differisse dalla vera opera di Euclide, gl' ingannò senza dubbio; e gli rese perciò meno accurati in esaminare una tal' edizione; dond' è avvenuto, che dai tempi di Teone finora non si sieno avvertiti in essa alcuni errori di non poco momento. Che perciò ci giova sperare, che l' impegno che ci abbiamo preso in restituire e liberare da nei questi libri, non debba dispiacere a' giusti estimatori delle cose geometriche, i quali sapranno ben discernere le legittime definizioni e dimostrazioni da quelle che non lo sono. E coloro i quali hanno tentato di mutare l' ordine ed il metodo Euclideo potranno anche convincersi, che sia tale il merito degli Elementi di Geometria composti da questo Geometra, che quantunque sì oltremodo guastati, con tutto ciò hanno formata l' ammirazione di tutti i Geometri sommi di ogni tempo; e per la loro eccellenza sono stati insegnati in tutte le scuole, tradotti e comentati in tutte le lingue: che perciò aveva ben ragione Roberto Simson di adattare a quest'opera ciò che Barrow aveva detto per la definizione delle quantità proporzionali, cioè che: *Nisi machinis impulsa validioribus, aeternum persistet inconcussa.* E si vedrà pure, che con molta ragione a' facitori delle ordinarie istituzioni geometriche, che non cessano a folla di comparire a dì nostri, per aver poi un' efimera du-

rata, si può rinfacciare ciò che dice Giuseppe Torelli nella dotta Prefazione al suo bellissimo Archimede stampato in Oxford nel 1782. *Non sum nescius quae antiqui pertractarunt, eadem a recentioribus pertractata esse, et quotidie pertractari; sed, absit dicto invidia, labore prorsus irrito. Si enim Euclides, ut de hoc uno loquar, aliqua in parte peccat, cur non redarguis? Sin autem omnibus sibi constat, cur ea mihi aliis verbis proponis? At quaedam scilicet recentiores detorquent, invertunt, immutant: ita quidem existimo: sed tamen dum hoc faciunt, quid quaeso aliud agunt, quam ut sarcinatores imitentur, qui foeminarum vestes quotannis refingunt, ut eas ad saeculi mores accomodent? De brevitate autem quam tantopere jactant, id nihil est, cum breve nihil dici debeat, quod sine explicatione aliqua intelligi nequit, et minus perspicue traditur. Quae cum ita sint, optime illi mihi de Geometria meriti esse videntur, qui in antiquis auctoribus emendandis, illustrandisque operam posuerunt.*

NOTE

AL LIBRO DELLA SFERA, E DEL CILINDRO.

Alle definizioni.

Archimede non aveva definito il segmento sferico, nè tampoco aveva ciò fatto Euclide; e noi abbiamo supplita una tal definizione. E sì questa che quelle del settore, e del rombo conico le abbiamo fatte per genesi, a fin di mettere una certa uniformità tra esse, e quelle del cono, del cilindro, e della sfera, che Euclide diede nel Libro XI.; ed anche perchè così facendo ci si è resa facile la loro applicazione a quelle Proposizioni in cui se ne fa uso. Intanto sì alla definizione del settore, che a quella del rombo conico vi abbiamo aggiunta una seconda parte, che contiene la definizione di Archimede.

A' Principj.

Archimede ha stabilito nel cominciamento di questo suo Libro alcune Proposizioni, che la maggior parte degli espositori ha prese per assiomi; ma che a rigor geometrico non sono tali: noi ritenendole con qualche modificazione, per renderle più chiare, e di una più facile applicazione, le abbiamo dato il nome, che l'era conveniente, di *Principj*.

Alla Prop. III.

La nostra maniera di esporre le verità di Archime-

de sulla sfera e sul cilindro esigeva che vi si premettesse l'altra enunciata nel'a presente Prop. 3, estraendola dal Libro *della Misura del cerchio* al quale si appartiene.

Nello Scolio poi di tal proposizione abbiamo assegnato il rapporto delle circonferenze di due cerchi, che conveniva recare esplicitamente negli Elementi di Geometria.

Alla Prop. V.

fig.61.II. In questa Prop. Archimede divide l'arco ABC per metà in B, ed unite le corde AB, BC, DB, assume che i due triangoli ADB, BDC sieno maggiori del triangolo ADC: e ad un uomo che inventava ciò poteva permettersi. Eutocio nel suo dotto comentario ai Libri sulla Sfera, e sul Cilindro volle dimostrar questo passaggio; e sulla sua dimostrazione nulla si era osservato da'Geometri fino a Giuseppe Torelli, il quale nel suo Archimede, a piede di pagina, disse: *haec demonstratio Eutocii non valet.* Ed in effetto essa non è sufficiente a provare l'assunto, che nel solo caso, che formandosi al punto D della AD, e nel piano dell'angolo ADC, un angolo uguale ad ADB, o a BDC, e preso nell'altro lato di quest'angolo una parte uguale alla AD; l'estremo di un tal lato cada al di sotto della AC: poichè se ciò non avviene, e che questo estremo cada al contrario al di sopra della AC, come si verifica sempre che l'angolo ADB, o BDC è maggiore di ADC; la dimostrazione di Eutocio non è soddisfacente. (*Si riscontri una tal dimostrazione ne' Comentarj ad Archimede*). Noi abbiamo perciò supplita diversamente la dimostrazione di cui si è parlato.

Alla Prop. XIV.

Archimede riduce tutte le superficie curve de' solidi che considera nel suo Libro I. sulla Sfera, e sul Cilindro, al cerchio; e tutte le loro solidità al cono. Or avendo egli in seguito dimostrato a qual triangolo sia uguale un cerchio (*Circuli Dimensio* Prop. 1.), ha in tal modo ridotte tutte quelle esibizioni di superficie curve ad una figura rettilinea; il che era importante, non solo per la pratica, in cui spesso si ha bisogno di valutarle; ma anche in molte ricerche geometriche. Era dunque necessario, che si stabilisse il rapporto tra un cono, ed una piramide, affinchè que' solidi da Archimede comparati al cono, potessero similmente esser valutati in pratica. La qual cosa non trovandosi da questo sommo geometra antico eseguita, nè altri avendola ancora esposta con quel rigore che convenivasi; noi abbiamo creduto opportuno di occuparcene in questa Propos. 14., che abbiamo dimostrata per mezzo di quello stesso principio di Euclide, del quale altrove abbiamo parlato (*Nota alla Prop.* 16. *del Libro XII.*).

Alla Prop. XV., XVI, XVII., e XVIII.

Le dimostrazioni di queste Proposizioni sono identiche a quelle di Archimede. Noi abbiamo però aggiunto alla 16, ed alla 17. un Corollario del quale avevano bisogno in alcune dimostrazioni seguenti.

NOTA

AL LIBRO DELLA MISURA DEL CERCHIO.

I principj su i quali abbiamo fondata la presente ricerca sono presi da Giacomo Gregory : ma non perciò gli si deve attribuire la maniera come noi gli abbiamo applicati a dimostrare le diverse verità comprese nel Libro *de Demensione Circuli* di Archimede: che anzi la stessa esposizione di tali principj , ne' due Lemmi, è molto più semplice di quella che ne diede il poc'anzi detto Geometra. Intanto siccome a ridurre in pratica le verità in tal Libro comprese, è necessario di conoscersi in quai modo si valuta un quadrato di cui sia dato aritmeticamente il lato, e che per gli usi pratici ai quali frequentemente servono i teoremi sulla Sfera , e sul Cilindro , spesso occorre di valutare la superficie , o la solidità di quei corpi ; non sarà perciò fuor di proposito, che qui si rechi in due teoremi la maniera di valutare uno spazio rettangolare , e la solidità di un parallelepipedo rettangolo , alle quali due figure le altre tutte , come si sa dagli Elementi , facilmente si riducono.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Se i due lati che contengono un rettangolo, sieno espressi con qualsivogliano numeri rapportati ad una stessa unità; il prodotto di questi dovrà dinotare in quadrati di tale unità il rettangolo proposto.

Sieno A, B i lati di un rettangolo espressi in numeri, come si è detto: sarà un tal rettangolo a quello di B nell unità comune ad A e B, come A a quell' unità*, e perciò quel rettangolo conterrà questo tante volte, quante A contiene di quelle unità; cioè quel numero di volte, ch'è dinotato da A. Similmente il rettangolo di B nell' unità sta al quadrato di questa, come B all' unità; è perciò quel rettangolo conterrà questo quadrato il numero di volte, ch'è rappresentato da B. Laonde il rettangolo di A in B dovrà contenere il quadrato dell' unità tante volte, quante n' esprime il prodotto delle unità di A per quelle di B. C. B. D.

*1. VI.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se i lati intorno ad un angolo di un parallelepipedo rettangolo sieno espressi in numeri rapportati ad una stessa unità; il prodotto di questi dinoterà il numero de' cubi di quell' unità, che si contengono nel parallelepipedo.

Sieno A, B, C i tre lati di un parallelepipedo rettangolo espressi in numeri, come si è detto. Ed es-

sendosi dimostrato che il prodotto de' due numeri che rappresentano A, e B esprima in quadrati dell' unità assunta quel rettangolo terminatore del parallelepipedo il quale è contenuto da A e B; è chiaro perciò, che se un tal piano si prenda per base del parallelepipedo, e che perciò sia C l' altezza di questo solido, dovrà esso stare a quell' altro parallelepipedo della base stessa e che ha per altezza l' unità, come C all' unità; cioè quel parallelepipedo conterrà questo il numero di volte espresso da C. Similmente si dimostra che questo parallelepipedo contiene il cubo dell' unità tante volte, quante volte il rettangolo di A in B contiene il quadrato dell' unità, cioè quel numero di volte, che viene espresso dal prodotto de' numeri che rappresentano A e B *. Adunque il parallelepipedo proposto dovrà contenere il cubo dell' unità quel numero di volte, che si dinoterà dal prodotto di A, per B, e per C. C. B. D.

* 7 prec.

SCOLIO GENERALE

Dalle misure assegnate pel rettangolo e pel parallelepipedo, in questi due precedenti Teoremi, è facile il rilevare, valendosi delle teoriche stabilite negli Elementi, la misura di tutte le figure piane rettilinee, quella del cerchio, e di tutt'i solidi poliedri, come anche la misura delle superficie e de' solidi che si sono considerati nel I°. Libro di Archimede sulla Sfera e sul Cilindro. E tutte queste cose si sono tralasciate di quì rapportare a disteso, non implicando alcuna difficoltà, e riducendosi a semplicissimi sviluppi, ne'quali sarà bene che si esercitino i giovani stessi, che hanno appresi gli Elementi di Geometria, o che ve gli guidino coloro che gli hanno diretti in tale apprendimento.

E R R A T A

Pag.		ver.		
2	ver.	15	Dimostrazione	Definizione
12	—	13	BF	DF
23	—	3	GK	HK
24	—	2 *cit.*	12. I.	22. I.
38	—	10	OG	OB
39	—	22	X	Y
40	—	17	CFEBHG	DFEBHG
53	—	21 *cit.*	15. I.	19. I.
56	—	10	CDE	CDF
57	—	*ult.*	FGM	FGN
58	—	6 *cit.*	12. V.	11. V.
		13	*fig.* 43. — *fig.* 42., *e* BE — BD	
61	—	33	*alla cit.* 29. I. — *si aggiunga l'altra* — *e.* 4. VI.	
62	—	2	KGL	KHL
		4 *cit.*	*d.* 11. XI.	*d.* 10. XI.
64	—	3	QOB	QOR
77	—	13	della	del
79	—	4	maggiore della	maggiore della metà della
83	—	27	AC ad EG	EG ad AC
87	—	30 *cit.*	13 XII.	11. XII.
89	—	2	TEOREMA	PROBLEMA
114	—	18	E	D
		21	AD, DC	AE, EC
115	—	8	*Al luogo dell'asterisco corrisponde la cit. d.*3.XI.	
119	—	29	*si cancelli* GE	
125	—	25	— *Manca accanto al rigo la cit.* 41. I.	
127	—	1	ZXV	ZXY
132	—	8 *cit.*	*p.* 23.	*p.* 13.
		7 *cit.*	15 XI.	15. XII.
		24	NMBX	NMRX

Pag. 139	—	1	EQG	EQF
148	—	30	ZY	Z*y*
159	—	20	SYT	SVT
160	—	30	e per la	e per anche la
274	—	15	del cerchio ,	*soggiungasi* , come 1 a 4. Ma è poi il quadrato del diametro al cerchio.

Avvertasi che nel Lib. XI. non si trova notato accanto alle due Prop. 1 e 25 il *V. N.* (*Vedi Note*), e che esso è superfluo accanto alla 26. Similmente nel Lib. XII. è esso superfluo accanto alla Prop. 1 , e manca poi accosto alla Prop. 6 , al Cor. 1. Prop. 7 , ed alla Prop. 8. Finalmente manca una tale avvertenza accanto alle Prop. 15 , 16, 17, 18 del Libro sulla Sfera e sul Cilindro.

CATALOGO

DELLE OPERE COMPONENTI IL CORSO DI MATEMATICHE DEL PROFESSORE FLAUTI, ANNUNZIATO ALTRA VOLTA AL PUBBLICO, ED ORA IN GRAN PARTE TERMINATO.

Corso di Geometria Elementare e Sublime vol. 4. in 8, *edizione settima*.

Si vende ognuno. 1. 20.

Vol. I. I primi sei libri, e l'XI° e XII° degli Elementi di Euclide preceduti da un lungo discorso, ed in fine una dissertazione sul Postulato V.

Vol. II. L'XI° ed il XII° Libro degli Elementi stessi, il I°. Libro di Archimede sulla Sfera sul Cilindro, e quello della misura del Cerchio; e le note critiche e Geometriche su i libri di Geometria degli Elementi suddetti.

Vol. III. Le Sezione del Cono precedute da una Storia sulle medesime.

Vol. IV. Le due Trigonometrie precedute da un discorso storico; e con applicazioni geometriche delle medesime.

Corso di Analisi Algebrica Elementare e Sublime vol. 4. in 8.

Vol. I. Elementi dell'Analisi Algebrica Elementare

I seguenti tre volumi non ancora pubblica-

ti comprenderanno l'Applicazione dell'Analisi Algebrica elementare alla Geometria, l'Introduzione all'Analisi Algebrica Sublime, e 'l Calcolo Differenziale ed Integrale.

Gli Elementi di Aritmetica da premettersi e questo Corso sono stati fatti dal Professore Flauti compilare dal Sig. Ab. Gaeta.

Corso di Trattati appartenenti all' invenzione Geometrica.

Si sono finora pubblicati i seguenti.

Fergola = Sezioni Coniche Analitiche vol. 1. in 8. 1. 50

= Trattato Analitico de' luoghi Geometrici vol. 1. in 8. 1. 20

Flauti = Geometria di Sito, edizione 2. vol. 1. in 8. 2. 40

Fig. 4.
F
M
A
C
G
E
H
D
B
L
Fig. 5
A
M
C
B
F
D
L
E
A
M
D
C
Fig. 10.
D
B
M
A
C
L
Fig. 11.
C
B
M
D
A
E
L
D
G
K
M
Fig. 15.
A
E
B
K
D
F
C
Fig. 14.
B
H
L
N
A
Fig. 19.
C
D
E
Fig. 20.
H
D
F
B
G
K
A
C
L

Fig. 23.
Fig. 24.

IV.
Fig. 35
G
O
N
A
R
V
C
T
L
N
K
V
Fig. 44
T
P
C S

Fig. 48.
O
L
G
H
M
C
F
A
B
D
E
P
D
G
C
F
Fig. 51.
N
R
G
P
I
X
Z
Q
A
T
Z
X
Fig. 53. 54.
R
N
O
T
P
S
Y
H
L
M
F
G
R
O
N
L
S
P
K
O
A
H
B
S
G
R
Q
X
O
C
Fig. 56.
T
K
L
R
M
Y
D
V
F
I
B
T
V
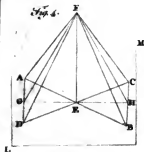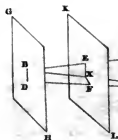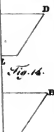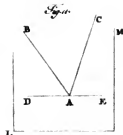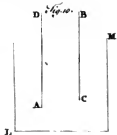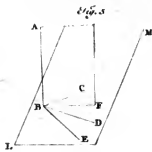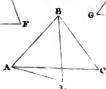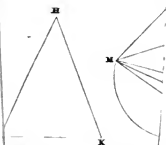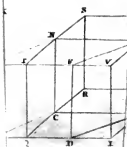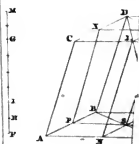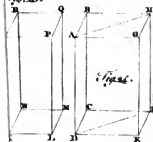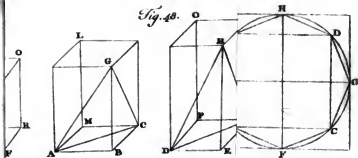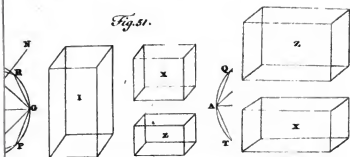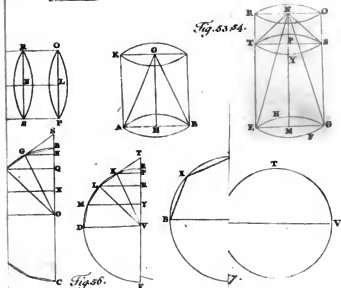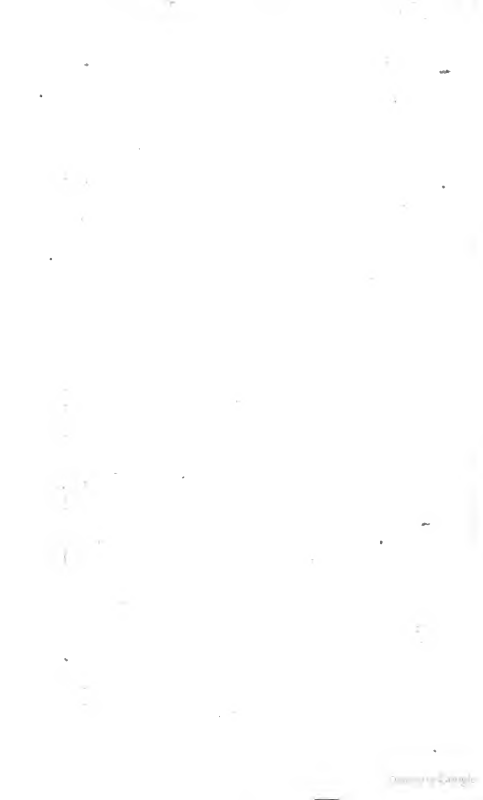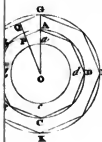
Fig. 59

Fig. 60

Fig. 62.   Fig. 63.

Fig. 65.

Fig. 67

Fig. 68.

Fig. 76.

N. 2.

Fig. 83.

N°. 2.

Note Tav. I.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 9.

Fig. 10

Fig. 12.

Fig. 17.

Fig. 18.

Fig. 22.

Not. Tur. II.
Fig. 26
N.° 3
g. 28